1007. D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Il Problem solving. Breve cenno e appunti sparsi su alcune ricerche classiche a carattere psicologico relative alla risoluzione dei problemi di matematica a scuola. Bologna: Formath. Scaricabile: https://www.formath.it/wp-content/uploads/2022/01/articolo-di-DAmore-e-Fandino-Pinilla-sul-Problem-solving-Formath.pdf

Il Problem solving

Breve cenno e appunti sparsi su alcune ricerche classiche a carattere psicologico relative alla risoluzione dei problemi di matematica a scuola

Problem solving

Brief mention and notes scattered on some classic psychological research related to the resolution of mathematics problems at school

Resolución de problemas

Breve mención y notas dispersas sobre algunas investigaciones psicológicas clásicas relacionadas con la resolución de problemas escolares de matemática

Bruno D’Amore[1 2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1] Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[2] NRD c/o Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia

Sunto. Del tema del Problem solving matematico scolastico attualmente si occupa con successo la didattica della matematica; ma alcuni decenni fa erano molto in auge studi a carattere psicologico relativi all’analisi dello studente nel corso di tale attività, soprattutto per mostrarne le difficoltà. Poiché tali studi tendono oggi a essere dimenticati e non vengono più citati, abbiamo pensato che potesse essere utile alla comunità degli insegnanti di matematica fornire un breve sunto di quali furono i principali studi e i principali autori in questo campo, realizzando questo breve saggio riassuntivo di quelle posizioni.

Parole chiave: Problem solving matematico, studi psicologici sulle difficoltà degli allievi in compiti di Problem solving matematico.

Abstract. The topic of school mathematical problem solving is currently successfully faced within mathematics education; but a few decades ago, psychological studies related to the analysis of the student during this activity had a great vogue, especially to show the student’s difficulties. Since such studies today tend to be forgotten and are no longer cited, we thought it might be useful to the community of mathematics teachers to provide a brief summary of what were the main studies and main authors in this field, making this short essay summarizing those positions.

Key words: Mathematical Problem solving, psychological studies related to the difficulties of the students in tasks of mathematical Problem Solving.

Resumen. El tema de la resolución de problemas matemáticos escolares se trata actualmente con éxito en la didáctica de la matemática; pero hace unas décadas los estudios psicológicos relacionados con el análisis del alumno en el transcurso de esta actividad estaban muy de moda, sobre todo para mostrar las dificultades. Dado que tales estudios hoy en día tienden a ser olvidados y ya no se citan, pensamos que podría ser útil para la comunidad de profesores de matemática proporcionar un breve resumen de cuáles fueron los principales estudios y autores principales en este campo, realizando este breve ensayo que resume esas posiciones.

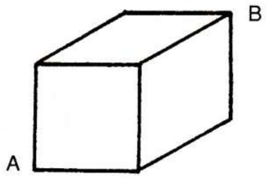
Palabras clave: Resolución de problemas matemáticos, estudios psicológicos sobre las dificultades de los alumnos en tareas de resolución de problemas en matemática.

Le fasi e le condizioni esterne

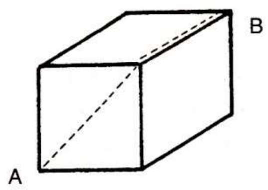
Moltissimi sono gli studiosi, soprattutto provenienti dal mondo della psicologia, che hanno esaminato, da vari punti di vista, il problem solving. Le direzioni di studio e di ricerca sono talmente tante, che qui ci limiteremo a indicare solo le più note.

Una prima classica distinzione riguarda le cosiddette attività di risoluzione di un problema; secondo questo approccio, una tale attività consta di quattro fasi:
• preparazione: gli elementi del problema vengono analizzati, messi in relazione tra di loro e con il dominio delle competenze a disposizione del solutore;
• incubazione: il solutore rinuncia a risolvere il problema ma, anche se pare interessato ed occupato in altro, in realtà, in modo inconsapevole, sta ... amalgamando gli elementi del problema;
• ispirazione: può avvenire o al momento del ritorno al problema in modo esplicito, oppure anche mentre il soggetto sta occupandosi di altro;
• verifica: l'idea che ha determinato l'ispirazione viene vagliata e confrontata con le richieste del problema per verificare che sia in sintonia con esse.
Più che da attività di problem solving in classe, questa descrizione trae origine da studi che gli psicologi hanno compiuto sulle attività di ricerca e scoperta da parte di famosi scienziati; ci pare, però, che essa possa descrivere almeno taluni se non tutti i comportamenti dei risolutori anche in aula. L'incubazione, per esempio, è stata riscontrata ed evidenziata in moltissimi casi. Proprio sulle due fasi di incubazione e ispirazione (riferendosi al fenomeno dell'insight) si sono sviluppate molte ricerche da parte di psicologi, tanto che oramai l'ispirazione sembra chiarirsi sempre più.
Oscuro resta invece il fenomeno della incubazione per la cui descrizione si fa uso di termini ("amalgamando") solo allusivi, proprio per mancanza di altri più specifici.
Si è anche parlato di una pre-fase di ispirazione inconscia negli anni '60, ma poi non se ne trova più traccia in studi più moderni. Alcuni autori descrivono il fenomeno come segue: durante la fase di preparazione, il ricorso a modelli già precostituiti provoca un effetto *Einstellung* (fermata, sospensione, interruzione); durante il periodo di incubazione il soggetto si libera da costrizioni mentali (in qualche modo prodotte dalle sue stesse competenze) e l'effetto cessa o, almeno, diminuisce. Resta comunque il fatto che l'incubazione è un processo inconscio o preconscio, citato ma a nostro avviso mai del tutto ben spiegato.
Un'altra ipotesi ancora: abbiamo più volte visto come la lettura del testo di un problema produca sempre delle condizioni implicite che appaiono come vincoli limitativi che, in realtà, si crea il soggetto stesso, forse perché le ha viste in altre occasioni ed esse dunque tendono a permanere. La fase di incubazione permette forse al soggetto di svincolarsi da tali condizioni restrittive. Abbiamo a questo proposito un bell'esempio. Abbiamo fatto lavorare un gruppo di insegnanti a lungo su cubi fatti di cannucce di bibite trattenute ai vertici da pongo o da scovolini nettapipe, per cui i cubi erano in realtà ... scheletri di cubo.

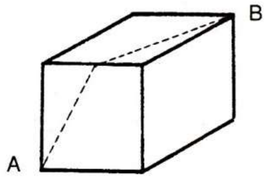
Un giorno abbiamo disegnato alla lavagna un cubo in prospettiva sul quale erano segnati due vertici opposti, dicendo che si trattava di un cubo di ferro, pieno.



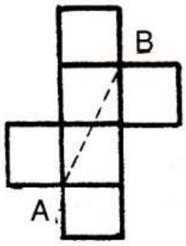
La domanda era quella di trovare un percorso di distanza minima tra A e B. C'è stata una certa riluttanza ad attraversare la faccia e fornire la risposta (sbagliata) della figura successiva.



Ciò perché in qualche modo permaneva un vincolo contrario addirittura ai dati e molti credevano di dover continuare a lavorare su scheletrati.
Con una certa riluttanza e difficoltà, si è giunti alla fine alla risposta corretta (ce ne sono diverse fra loro equivalenti).



Per convincere che quella appena mostrata fosse la risposta corretta, è stato decisivo il ricorso allo sviluppo di un cubo di cartoncino.



In tale modello geometrico, la risoluzione diventa ovvia; se poi si richiude il cubo sviluppato, si vede che essa è davvero la risposta corretta convincente alla domanda iniziale.

Altri modelli di comportamento di un solutore evidenziano esplicitamente la sua abilità (secondo gli studi di C. Bunderson del 1965 riportati in Kleinmuntz, 1976):
• assimilazione dell'enunciato del testo del problema;
• percezione delle relazioni tra i dati del problema;
• produzione di un'organizzazione appropriata delle relazioni emerse;
ma queste fasi avvengono non in ordine, come qui esposte, bensì in modo più o meno caotico, intrecciate tra di loro.

Altri modelli ancora prediligono un'analisi comparata di mezzi a disposizione e di fini (parziali e totali) da raggiungere: stiamo pensando alla teoria di A. Newell, J. C. Shaw, H. A. Simon, pubblicata nel 1959, ben spiegata in Kleinmuntz (1976), e poi seguita da altri lavori di Newell e Simon pubblicati nei primi anni '60 (idem); essa è interessante soprattutto perché ha poi portato a un programma molto famoso degli anni '60 che si chiamò GPS (General Problem Solving) e che in quegli anni fece nascere molte ingenue illusioni sulle future capacità di problem solving generale da parte dei calcolatori.
Secondo questa teoria, il risolutore dapprima confronta la situazione iniziale (i dati o alcuni di essi) con lo scopo finale (la domanda del problema); ciò porta a schemi che il risolutore analizza; ora egli lavora su questi schemi che altro non sono se non condizioni aggiuntive non esplicitate dal testo, ma che consentono di approssimarlo sempre più alla soluzione; si crea così una rete di connessioni sempre più pertinente e sempre più vicina alla soluzione richiesta, in un disordine apparentemente caotico che però ha una logica nell'evoluzione della soluzione. Dunque: si creano sottoproblemi originati dall'analisi dei dati e dal loro confronto con la richiesta finale; ciascuno di tali sottoproblemi viene risolto e ogni risoluzione fornisce a sua volta dati nuovi per approssimare la risoluzione generale, quella finale richiesta dal problema. Se si giunge a un vicolo cieco, il risolutore ritorna indietro e ricomincia per un'altra strada. Non c'è un ordine logico, ma euristico che è stato definito dagli autori "a lume di naso". Si capisce subito come una teoria di questo tipo si adatta molto bene a un'analisi da parte di un programmatore il quale deve appunto studiare una serie di sottoproblemi del problema finale, che si avvicinino sempre più al finale. Naturalmente i comportamentisti radicali attaccano questa teoria perché essa non può essere espressa in termini di stimolo-risposta e perché non descrive nulla di ciò che accade all'interno dell'organismo umano nella attività di problem solving.
Ma la teoria di Newell e colleghi non vuol essere un tentativo di considerare analisi neurologiche, bensì solo una descrizione dei processi intesi come trasformazioni di informazioni simboliche.

Un altro modello molto celebre è quello di L. Burton, J. Mason e K. Stacey (1982) che si sviluppa su 4 fasi:
• fase iniziale; lo studente tenta di comprendere che cosa deve fare e di che cosa tratta il problema che ha di fronte; per procedere, caratteristica positiva di questa fase farsi è una buona rappresentazione della situazione problematica; se il problema è posto in termini concreti, la rappresentazione può essere semplice, se è posto in termini generali, compito iniziale dello studente è quello di darsi esempi concreti o forme che illustrino la situazione; ciò fornisce stimoli per procedere e passare alla fase successiva; se questa fase ha successo, il soggetto dimostra interesse a proseguire nella risoluzione;
• fase di attacco; è la fase di maggiore rilevanza: il risolutore saggia una prima ipotesi di risoluzione che può non condurlo in porto, e allora deve essere disposto a ricominciare ... l'attacco; a questo punto può essere necessario l'intervento del docente per indirizzare in modo vincente lo sforzo, specie se, dopo un percorso difficile, si presenta il caso di dover ricominciare proprio daccapo; va da sé che il riconoscimento di non poter proseguire è già un primo passo verso la risoluzione: il soggetto che s'incaponisce contro l'evidenza e mostra poca disponibilità a rivedere il proprio operato è più difficile da seguire;
• fase di revisione; è la fase in cui il risolutore confronta la propria risoluzione con lo stimolo di partenza (per esempio, il testo del problema); può darsi il caso in cui il confronto mostri che non c'è congruenza tra le due cose e allora questa fase ha molti lati in comune con la precedente e il soggetto deve essere disposto a ritornare sui suoi passi; è bene che questa fase sia scritta, proprio per facilitare il controllo personale e per avere materiale di discussione con la classe;
• fase di estensione; un problema dovrebbe non essere mai un fatto isolato, a sé stante, ma far parte di un processo continuo; la risoluzione di un problema dovrebbe portare alla creazione di un altro, e così di seguito; la fase di estensione porta dunque a rinforzare lo sviluppo di un atteggiamento matematico; a questo punto si sviluppa un processo a spirale perché, sulle ceneri della fase di estensione, sorge la fase iniziale per un nuovo problema.

Altri modelli si sono ispirati alla teoria dei giochi; altri all'euristica dei giochi; altri ancora interpretano il problem solving come appartenente alla categoria dell'apprendimento dei concetti; tra tutti quelli che appena appena accenniamo, faremo riferimento solo agli studi di quest'ultimo caso: K. R. Laughery (1961), K. R. Laughery e L. W. Gregg (1962), e altri successivi (analizzati tutti in Kleinmuntz, 1976).

Se il tentativo di descrivere le fasi del problem solving si presenta come un'impresa sovrumana per la ricchezza e il numero enorme di contributi dati, quasi peggio è quello di descrivere, anche solo rapidamente, le posizioni sulle condizioni esterne. R. M. Gagné (1973) propone tre variabili, suscettibili di uno studio assai più approfondito di quanto faremo qui:
• stimoli; essi possono essere fisici, verbali, non-verbali, iconici, ... ; non è detto che ogni individuo risponda allo stesso stimolo in modo uguale, anzi: si passa da una situazione di indifferenza rispetto agli stimoli, a una situazione di condizionamento totale; Gagné sostiene che «occorre ipotizzare un processo di mediazione che consenta una codificazione degli stimoli stessi»; ma questa appare un'impresa titanica dato che le due variabili: testo o tipo del problema, situazione o tipo degli stimoli, si presentano in una casistica a prima vista immensa; alcuni psicologi, sulla spinta di Gagné appunto, hanno provato a verificare le sintomatiche reazioni dei risolutori di problemi al singolo tipo di stimolo, ma su ciò sorvoliamo; altri hanno studiato l'intervento di stimoli esterni, come il

rumore, la temperatura, la pressione, la quantità di ossigeno nell'aria e altro; ma non ci pare il caso di scendere in particolari;
• direttive verbali; si tratta di indicazioni tese a favorire un certo modo di vedere il problema, del tipo: «Guarda prima la figura di destra e poi quella di sinistra»; oppure: «Osserva il denominatore della frazione, non vedi che ...?»; è ovvio che direttive di questo genere entrano direttamente in gioco nell'attività di problem solving e che possono essere studiate per capire la loro funzione specifica; ma anche qui la casistica appare insormontabile;
• istruzioni; esse hanno la funzione di «suscitare l'entrata in azione dei processi di mediazione che consentono la risoluzione del problema» e dunque sono dirette a favorire quel che noi chiamiamo "entrata in problema"; è ovvio che le istruzioni entrano in gioco in molti modi diversi, a seconda della loro tipologia; ecco alcuni casi:
    • informazioni sulla natura della soluzione richiesta; talvolta esse sono necessarie per sapere se una soluzione è adeguata alle richieste; per esempio, al risolutore di un anagramma va detto che la parola cercata deve essere una parola italiana di uso comune; al risolutore di un esercizio che parla di velocità si può dire se la soluzione deve essere approssimata o no;
    • informazioni sugli aspetti rilevanti della situazione di stimolo; può servire per disambiguare uno stimolo; per esempio, in un dato relativo a una carta da gioco (7 di cuori) si può dare informazioni sul fatto che quel che conta è il valore (7) e non il tipo di seme;
    • informazioni-richiamo a concetti o regole appropriate; è quanto fanno comunemente gli insegnanti;
    • informazioni sul processo da seguire con il pensiero per giungere a passi decisivi (o anche direttamente alla soluzione); ma qui si apre allora tutto un capitolo nuovo che, nato negli anni '60, è stato teorizzato e ha avuto un suo proprio sviluppo; stiamo pensando alla cosiddetta "scoperta guidata" e al lavoro di R. M. Gagné e L. T. Brown del 1961 (descritto in Gagné, 1973) e di M. C. Wittrock del 1965 (idem).

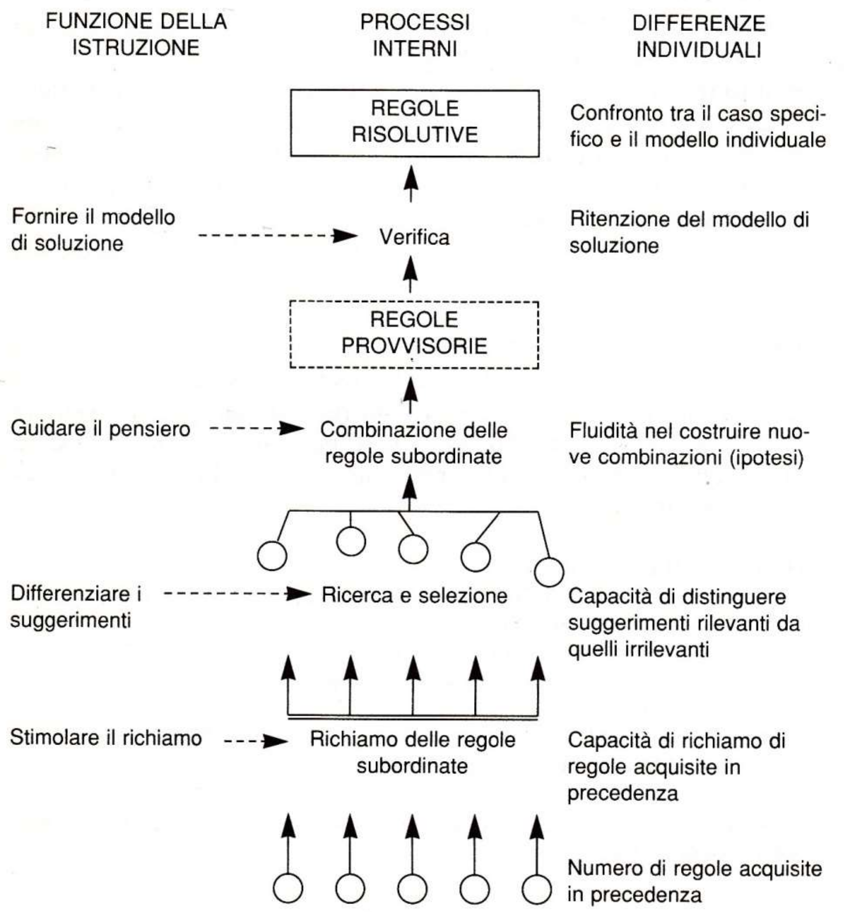
Ovviamente, questo tipo di considerazioni potrebbe proseguire a lungo; ma non è il nostro scopo: vogliamo qui limitarci solo a dare indicazioni sulla ricerca possibile e su alcuni risultati sui quali potrebbe essere interessante che l'insegnante rifletta. È doveroso però ancora citare gli studi fatti sull'ambiente sociale dell'apprendimento da Murray (1972).

Quasi tutto quel cui abbiamo finora fatto cenno è rintracciabile in Kleinmuntz (1976), specie alle pp. 19-24 e 137-141; in tale testo, i riferimenti bibliografici specifici sono alle pp. 366-373.
Si vedano anche: Murray (1972), Resnick e Ford (1991, Cap. 7) e Burton, Mason, Stacey (1982).

Condizioni interne e differenze individuali

Come ovvio contraltare agli studi sulle condizioni esterne, troviamo l'analisi alle delicate, e più difficilmente rilevabili ed esplicitabili, condizioni interne. Non è scindibile, da questo esame, quello sulle differenze individuali che talvolta sono chiamate "stili". Non sempre è bene fare distinzioni tra i due aspetti. Le condizioni interne hanno un'influenza

decisiva in diversi momenti (fasi) del problem solving, per esempio nell'atteggiamento nei confronti dell'enunciazione del problema proposto.
Gagné (1973) propone il seguente grafico per illustrare i fattori che intervengono nella risoluzione dei problemi.



Nella colonna verticale centrale si vuole cogliere ed esplicitare l'essenziale dei processi interni e quella destra le differenze individuali. Una lettura globale del grafico mostra che il problem solving dipenderebbe dall'accettazione e dalla presenza di regole preventivamente acquisite che, nei casi più semplici, sono concetti. Banalmente, a mo' di esempio: in un problema su un triangolo rettangolo, sono coinvolte consapevolezze già acquisite su triangolo e angolo retto. In un primo passo, il ricorso a sollecitazioni che smuovono condizioni interne positive è quello di richiamare regole e concetti già appresi; entrano in gioco (si veda il paragrafo precedente) le istruzioni fornite dall'esterno (e più o meno esplicite) che sollecitano condizioni interne favorevoli.
Successivamente, tra le regole o i diversi componenti della regola richiamata alla memoria, il soggetto seleziona le parti specifiche che deve considerare rilevanti, in una continua analisi degli stimoli, e scarta le altre. Prendendo a prestito un termine dalla teoria della comunicazione, è ovvio che questa fase può risultare un po' confusa, e dunque avere un "rumore" di fondo: una condizione ottimale interna è proprio quella che permette di distinguere, tra i segnali, quelli significativi dai rumori nocivi.

Ancora un passo successivo, quello che molti autori identificano con la formulazione delle ipotesi; si tratta di combinare concetti, regole richiamate e situazione specifica problematica in oggetto: un tal groviglio di suggerimenti e idee che non può essere pensato e interpretato se non come fatto tutto interno al soggetto. Se a questo punto si chiede una dichiarazione esplicita di quel che sta succedendo, intanto appare una grande difficoltà, e poi, comunque, quel che il soggetto riesce a dire non è che una timida parvenza di quel che sta succedendo davvero.
Maier (negli anni '30), Katona (anni '40) e Bruner (anni '50 - '60) (tutti ben illustrati in Gagné, 1973) hanno dato indicazioni oramai classiche sul modo di studiare questa fase; ed è d'altra parte conoscenza ovvia per ogni educatore il fatto che una guida esterna (vuoi sul terreno delle direttive, vuoi su quello delle istruzioni) favorisce notevolmente il miglioramento della capacità di problem solving; ma, arriviamo al punto, lo stesso farsi chiarezza interiore, organizzando linguisticamente le sensazioni confuse interne, produce aumento oggettivo nello stesso senso positivo.
Giunge così la fase delle "regole provvisorie" cioè quelle che il risolutore pensa che risolvano il suo problema, fino a prova contraria: queste regole vanno comunque sottoposte a verifica cioè vanno confrontate con gli stimoli (il testo del problema, per esempio) per accertarne, riconoscerne l'adeguatezza. Tuttavia pare che a questo punto il risolutore si sia già fatto un "modello interno" della risoluzione del problema ed è con questo, soprattutto, che egli fa la verifica (citiamo ricerche di G. A. Miller, E. Galanter e K. H. Pribram del 1960, analizzate in Gagné, 1973). In realtà, riteniamo che la scelta delle regole provvisorie non sia "pura", cioè slegata dal contesto; è assai più ragionevole pensare che si tratti di parte del modello interno stesso; e che, dunque, la verifica sia contemporanea alla creazione del modello interno e alla scelta delle regole provvisorie.
Prima o poi, a volte anche al primo colpo, le regole provvisorie non vengono smentite e il modello interno della soluzione fornisce la soluzione corretta; e il processo ha positivamente termine.

È ovvio che c'è uno "stile personale" che condiziona l'ordine, la durata, l'importanza delle singole fasi; e che, dunque, ogni processo risolutivo sia una storia a sé, pur con alcune caratteristiche comuni, più o meno marcate.
Tra le differenze individuali, possiamo indicare, seguendo Gagné (1973), le seguenti.
• Quantità di informazioni immagazzinate; è ovvio che una persona può essere un migliore solutore perché sa di più; perfino i cosiddetti test di intelligenza a volte peccano ingenuamente in questo senso, perché non tengono conto della cultura individuale; non solo nei test a carattere matematico, per esempio, si rileva ciò, ma anche in quelli linguistici: uno studioso conosce molte più parole di un altro genere di lavoratore e ciò, indubbiamente, lo favorisce in certi test di padronanza linguistica, anche se lo studioso è un fisico, o un chimico, ..., e non un letterato.
• Facilità di richiamare dalla memoria le informazioni; è ben noto che, a parità almeno potenziale di informazioni immagazzinate, vi sono persone più abili a richiamare quelle informazioni, e persone meno abili; questo richiamare è soggetto a interferenza, più o meno forte a seconda o del soggetto o delle particolari condizioni del soggetto, come ha dimostrato B. J. Underwood in una ricerca pubblicata nel 1964 (ben illustrata sempre in Gagné, 1973).
• Capacità di selezionare i concetti; anche in situazioni di conflitto concettuale; pare vi siano persone che mantengono l'abilità di distinzione dei concetti e di loro selezione in base al tipo del problema, alla situazione e così via; mentre per altre può esservi più

facilità alla confusione. Che cosa sia però davvero questa abilità resta difficile da stabilire e da dire.
• Fluidità nel formulare ipotesi; sembrano esservi persone più abili nel fondere insieme regole e concetti per arrivare a ipotesi nuove, più o meno ben formulate; qui ci si potrebbe ricondurre a quella che gli psicologi hanno chiamato fluidità intellettuale, studiata a fine anni '50 e inizio '60 specie da J. P. Guilford, da D. W. Taylor e da J. W. Getzel e P. W. Jackson (Gagné, 1973); si è parlato di maggior flessibilità di certi individui; ci sono invece persone che non vedono una relazione che appare ad altri evidente. Ma ciò può dipendere da vari fattori, tra i quali la concentrazione.
• Capacità di ritenere un modello di risoluzione; sembra vi siano persone più o meno abili a modificare una situazione nella quale vi siano condizioni variabili e a ritenere in mente il modello in evoluzione, fase per fase. Un'incapacità in tal senso potrebbe essere la causa del non saper cogliere l'evoluzione in atto di una successione di modelli della soluzione.
• Capacità di saper confrontare il caso specifico con il caso generale. Parlare semplicemente di capacità di generalizzazione, a noi sembra dispersivo; si è studiato un caso generale, si ha di fronte un caso particolare che oggettivamente e logicamente rientra in quello; ma non si sa cogliere questa appartenenza; non è poi un caso così isolato in aula ...
È ovvio che questo tipo di distinzioni porta a vagliare la maggior o minor capacità da parte dello studente di produrre una costruzione di una struttura "integrata" nella quale convergono conoscenze concettuali (relative a un campo di problemi), ma anche strategie a essi collegate. Questa struttura è stata chiamata "schema mentale" (De Carolis & Pellerey, 1987) ed è evidente che uno degli scopi di tutto l'insegnamento è allora quello di stimolare la costruzione di un tale apparato. Viceversa, il risultato è l'opposto, cioè lo studente tenderà a dissociare in maniera deleteria le conoscenze di tipo dichiarativo (le "teorie") da quelle di tipo procedurale (le "strategie") (anche su questo punto, si vedano gli stessi due autori precedenti, nonché Davis, 1986). Da che cosa dipende ciò? Sembra dovuto essenzialmente a tre fattori (Hierbert & Lefevre, 1986):
• errori (o anche solo lacune) nelle conoscenze di base;
• mancanza o difficoltà nella codificazione delle reciproche relazioni tra operazioni aritmetiche (algoritmi) e conoscenze semantiche (perché li si usa);
• conoscenza "a compartimenti stagni", settoriale, senza collegamenti tra settori.
È ovvia la cura, una volta diagnosticato un simile male: nel proporre una conoscenza, è essenziale una costruzione significativa, ragionata, attiva, intelligente tra le conoscenze dichiarative e quelle procedurali a esse collegate. La ricerca psicologica, però, ha messo in evidenza come, in questo settore, sia di straordinaria importanza promuovere una presa di coscienza degli stessi processi e delle strategie, quella che si chiama metacognizione (sulla quale sorvoliamo, dato che si tratta di uno dei temi più noti in ambito di educazione scolastica).

Tra gli stili o comunque tra le differenze individuali, c'è anche una predilezione interna, forse neppur esplicita o consapevole, verso l'induzione o verso la deduzione. Non si deve intendere solo un'interpretazione in senso matematico di questi termini, ma vedere in che modo sono applicati (sempre all'interno del processo di problem solving); per esempio, seguiamo quel che dice Burrhus F. Skinner (1968):

> Molti esempi di comportamento di problem solving potrebbero farsi rientrare nell'induzione. Questo termine si applica sia quando gli stimoli che evocano il comportamento appropriato ad un insieme di contingenze sono derivati da un'esposizione alle contingenze, sia quando sono ricavate dall'esame diretto del sistema di rinforzi. In questo senso "indurre" non significa

> derivare una regola generale da istanze specifiche, ma piuttosto costruire una regola capace di generare il comportamento appropriato ad un certo insieme di contingenze.

Ecco perché abbiamo preferito inserire quest'argomentazione all'interno di un discorso sulle condizioni interne piuttosto che esterne: la scelta dell'esame (anche inconsapevole), la caratteristica della pressione degli stimoli, sono fatti individuali, significativi in modo diverso a seconda degli individui.
Continua Skinner (1968):

> La deduzione è ancora un altro modo di costruire stimoli discriminativi. Le massime, le regole, le leggi sono oggetti fisici che possono essere manipolati fino a produrre altre massime, regole e leggi. Dalle scoperte empiriche riguardanti il successo di certe pratiche o da un esame dei sistemi per il mantenimento delle contingenze descritte dalle regole del primo ordine, si possono derivare "regole del secondo ordine", regole che permettono cioè di manipolare le regole del primo ordine. (...) Le regole del secondo ordine sono scoperte per via induttiva (...) oppure per via deduttiva (...) da un'analisi delle regole del primo ordine o dalle contingenze che queste descrivono.

Non sembra che la deduzione o l'induzione siano fattori del tutto esterni, ma che dipendano in gran parte dalle differenze individuali dei soggetti lo scegliere l'una o l'altra.
Sempre a questo punto presentiamo un'altra questione; rispondendo alla domanda: «Quali sono i prodotti del problem solving?», Skinner (1968) propone che vi siano risposte in termini di:
• acquisizione di conoscenza (e qui il nostro non si lascia sfuggire il riferimento a Polanyi e Bridgman su una conoscenza personale anche di tipo operativo in senso stretto);
• strutturazione del pensiero operante (tra cui l'aumento della quantità di questioni attorno alle quali saper pensare in modo significativo).
Se accettiamo queste risposte, si ha una produzione di benefici tutti interni i quali, a loro volta, producono nuove condizioni interne delle quali occorre tener conto (più o meno consapevolmente) nelle successive attività di problem solving; ma ci sentiamo giustificati nel porre proprio in questo paragrafo questo breve discorso sui prodotti, anche perché il beneficio non potrà che essere variabile in modo individuale e porterà effetti diversi a seconda dello stile (diciamo: della disponibilità personale a riceverli) di ciascun solutore.

Robert Gagné, nel Cap. 8 del suo libro (1973), capitolo intitolato «Problem solving», propone esercizi che coinvolgono regole di ordine superiore, aventi all'inizio attinenza stretta con la matematica (uso di certe regole algebriche), poi più vaghe (problemi di configurazione di fiammiferi), poi estranee (gli esperimenti di Maier con il pendolo); in ogni caso sembra ammettere la significativa differenziazione del comportamento individuale anche di fronte ad apprendimenti (di ordine primario o secondario) che potrebbero essere definiti, se non identici, almeno simili o paragonabili.

Tra le condizioni interne, non abbastanza sviluppato dalla ricerca ci sembra l'interessante capitolo della "conoscenza tacita", detta dagli specialisti K-tacita, dove K sta per knowledge, conoscenza. Si tratta di quel tipo di competenza, conoscenza, certezza che l'essere umano possiede ma che non si rappresenta in modo esplicito, che gli permette di interagire in qualche modo ma, sebbene ne sia a perfetta e consapevole conoscenza, non riesce a esprimere in altro modo, se non operando o implicitamente. Spesso tale tipo di conoscenza è inesprimibile in modo linguistico (oppure, è esprimibile, ma solo in minima parte) ed è irriducibile ad altri tipi di conoscenza (Polanyi, 1979).

Vi sono vari esempi possibili, generali, non attinenti strettamente al nostro tema generale, ma efficaci per capire il senso della cosa e la sua portata singolare:
• vi sono cause che producono variazioni; i momenti di passaggio sono, il più delle volte, difficilmente esprimibili o riducibili ad altre esperienze, se non in minima parte (lo sbocciare di un fiore);
• vi sono sensazioni, sentimenti, situazioni conosciute, ma esprimibili solo per allusioni o metafore; bellissimo l'esempio riportato da B. Bara (1990, Cap. 5), tratto dal *Catalogo dei vini d'Italia* (1976) di Luigi Veronelli; il sapore del ben noto e apprezzato Barbaresco è reso dal famoso enologo a parole come segue: «Quieto e asciutto, si apre subito in bocca, carezzevole, per stoffa di grande eleganza, e, tuttavia, per nerbo sentito; è vino di non comune razza». Se non avete assaggiato davvero il Barbaresco, questa affascinante descrizione non vi dirà affatto qual è il suo sapore;
• solitamente gli artisti creativi non amano essere visti al lavoro, neppure dai propri allievi; esplicitare a livello cosciente la propria prestazione sembra ridurne l'efficacia;
...
Gli esempi potrebbero continuare; spesso si parla in questi casi di "conoscenza opaca", termine che ben rende l'effetto della conoscenza tacita su chi l'avverte ma non sa esprimerla.

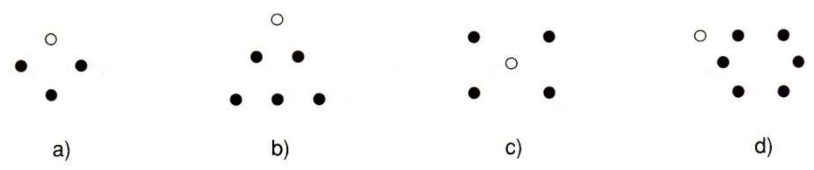
Rispetto alla metaconoscenza, si tratta di una forma difficile da esplicitare anche a sé stessi: saper fare (gustare, creare, ...) ma rendersi anche conto di non saper esprimere quanto si sa fare. Ecco perché gli studiosi di scienza cognitiva sovrappongono questa forma di K-tacita a quella procedurale, nella quale si sa fare (e se ne è consci) ma non si sa esprimere quel che si è fatto. Entra in gioco anche l'abitudine o la ripetizione: cose tanto abituali da essere divenute un meccanismo, sembrano difficili da spiegare in termini espliciti.
Ma se la K-tacita non è espressa, ha senso parlare di conoscenza? C'è chi dice di no, come J. Searle (1988), che parla piuttosto di "capacità di sfondo", non rappresentata, non rappresentabile in base alle competenze. È probabile che proprio gli studiosi di intelligenza artificiale (in fondo i più interessati alla questione) trovino un giorno un modo per esplicitare attraverso un opportuno modello questa K-tacita. Su questa si basa molto del comportamento umano, tutte le volte che si avverte, si intuisce, si sente che... qualcosa … che poi non ci si sa spiegare a parole.

Ci sono poi studiosi che hanno evidenziato il fatto seguente nella ricerca su campo: un solutore può avere consapevolezza del fatto che, quando ci si accinge a leggere il testo di un problema o, meglio ancora, al momento in cui passa dalla lettura a decidere che cosa fare, si crea un complesso ingarbugliato nella mente. Nella spiegazione di questo fenomeno, la K-tacita sembra giocare un ruolo decisivo ma ostico da studiare; sulla motivazione (dunque la buona disposizione a darsi da fare per cercare una strategia per risolvere il problema) potrebbe giocare un ruolo essenziale proprio la ricchezza di stimolazioni che la K-tacita è in grado di creare (Kleinmuntz , 1972).
Arricchire la conoscenza di sfondo con opportuni stimoli (culturali, sociali, etici, di varia natura) potrebbe essere un modo per sbrogliare la matassa di cui sopra e fornire un ampio ventaglio di riferimenti.

Approcci psicologici allo studio e alla ricerca nel problem solving. La Gestalt

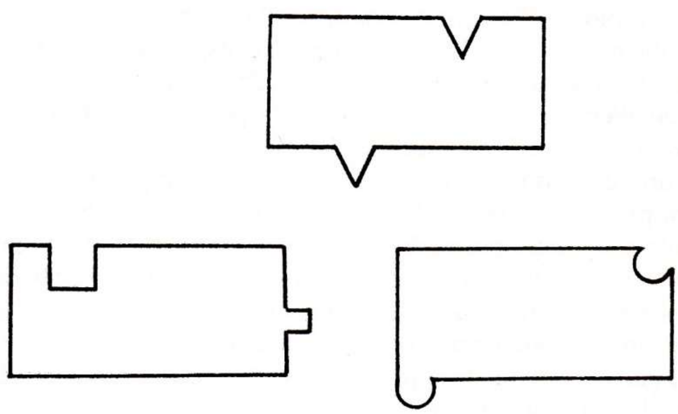
Fra tutti gli approcci possibili elaborati dalla psicologia e, spesso, fatti propri dai matematici, per quanto concerne sia l'elaborazione di modelli, sia studio e ricerca, ne emergono, per rilevanza, quattro su tutti gli altri:
• approccio gestaltista;
• approccio psicometrico;
• approccio comportamentista;
• approccio cosiddetto informatico;
a ciascuno di essi dedicheremo di seguito una più o meno breve presentazione.

Se una persona tenta di descrivere le proprie sensazioni, le proprie impressioni, le intuizioni che accompagnano un'attività mentale qualsiasi (tra le altre, anche la risoluzione di problemi), ci si accorge che il pensiero non scorre lineare da una fase all'altra, ma si crea invece una vasta rete molto complessa di percezioni, pensieri, atteggiamenti ecc., contrariamente a quel che vorrebbero psicologie riduzioniste che elaborano catene lineari di fasi. Gli psicologi che si identificarono con l'idea di Gestalt (ricordiamo soprattutto Kohler, Koffka, Wertheimer) riconoscevano il fatto che la mente umana non si limita a entrare in contatto o a prendere atto di quel che si presenta, ma *interpreta* eventi, fenomeni, atti, oggetti, forme ecc. Ciò, a partire dalla semplice percezione, fino ad arrivare alla risoluzione di problemi (di qualsiasi tipo, non solo matematici), attività quest'ultima che i gestaltisti considerano come l'espressione tipica e più elevata dell'intelligenza umana. Percepire non è la semplice somma di stimoli che agiscono sui sensi, ma è la rielaborazione di una struttura, perché è il risultato di un'interpretazione del cervello umano. Per esempio (Luchins & Luchins, 1970), lo stesso circoletto bianco vuoto del successivo schema grafico assume interpretazioni diverse a seconda del contesto perché la mente umana interpreta strutturalmente un ammasso di punti (tutti pieni neri, uno solo bianco vuoto):



• nel caso a) il punto bianco tende a "chiudere" la struttura dando l'immagine interpretata di un quadrato o rombo laddove invece sono solo, in realtà, quattro punti, tre neri e uno bianco;
• nel caso b) lo stesso punto tende a chiudere la figura e a strutturarla in triangolo;
• nel caso c) sembra che la maggioranza degli esseri umani veda il punto bianco come il centro di un rettangolo, cercando quindi l'interpretazione più compatta, una buona forma;
• nel caso d) il punto bianco tende a essere visto come "espulso" dalla struttura, semplicemente come un punto fuori da un esagono.
I gestaltisti sostennero quindi che identità e funzione di un elemento della percezione non sono elementi fissi ma cambiano a seconda dell'ambiente; e che la forma in cui si presentano gli elementi percettivi gioca un ruolo determinante nell'interpretazione: la

mente umana, in sostanza, rifiuta la semplice dichiarazione univoca e uniforme: «In ogni caso si tratta di un puntino bianco vuoto», ma tende invece a creare una struttura; il contesto, dunque, determina la percezione, e non l'oggetto in sé.
A sostegno di questa tesi, i gestaltisti portavano vari esempi: la musica intesa non come semplice somma di note, ma elaborata dal cervello umano come struttura complessa; il cinema (quando Wertheimer fece questo esempio la prima volta era il 1923, anni d'oro per la nuova arte che si stava affermando) inteso come struttura dal cervello umano e non come semplice successione di fotogrammi.
Ricordiamo lo studio empirico delle famose forme seguenti.



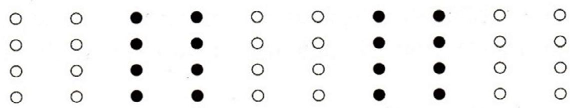
Il cervello non le vede come semplici linee, ma come rettangoli (buona forma) con "incavi" e "sporgenze". Ancora un esempio: è più facile dire a colpo d'occhio che nella seguente situazione ci sono 6 punti neri nella figura di sinistra, che non in quella di destra.

Ciò avviene a causa della "buona forma" nella quale si presenta, nella quale sono "organizzati" i punti. [Quest'idea di "buona forma", molto importante nel movimento gestaltista, entra anche nell'interpretazione e nella lettura di formule algebriche; vi sono formule che, per la loro forma buona, sono più facili da ritenere o anche solo da "vedere" a colpo d'occhio, rispetto ad altre].

Leggi classiche della Gestalt
(fonte: Cesa-Bianchi, Beretta, Luccio)

1. Legge della vicinanza:
gli elementi del campo percettivo vengono uniti in Forme con tanta maggior coesione quanto minore è la distanza reciproca.

2. Legge della somiglianza:
gli elementi vengono uniti in Forme con tanta maggior coesione quanto maggiore è la loro somiglianza



3. Legge del destino comune:
gli elementi in movimento solidale tra di loro (e differente da quello degli altri elementi) vengono uniti in Forme.

4. Legge della direzione:
gli elementi vengono uniti in Forme in base alla loro continuità di direzione.

5. Legge della chiusura:
le linee che formano figure chiuse tendono ad essere viste come unità (qui sotto, si tende a vedere rettangoli e non solo coppie di linee vicine).

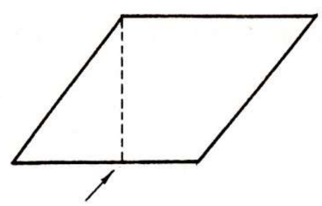
6. Legge della pregnanza:
la Forma che si costituisce è tanto *buona* quanto le condizioni date lo consentono.

7. Legge dell'esperienza passata:
elementi che per la nostra esperienza sono abitualmente associati tra di loro, tendono ad essere uniti in Forme.

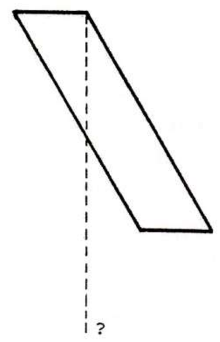
Spinti da queste considerazioni, i gestaltisti supposero che anche nella risoluzione dei problemi vi fossero strutture, buone forme e considerazioni simili da fare: l'ambiente psicologico, lo "spazio interiore" nel quale avviene l'atto della conoscenza è soggetto alla stessa tensione, alla stessa tendenza a vedere strutture e non semplici enti disorganizzati. Dunque, è come se, in questo lavorio sottoposto a pressione contestualizzante, il cervello cercasse un equilibrio tra parti che possono anche sembrare sconnesse o non relazionate tra loro.
Non si può non citare qui l'insight: il ruolo dell'insight è centrale nell'interpretazione gestaltista del problem solving. Furono decisivi gli esperimenti di Wolfgang Kohler (pubblicati la prima volta nel 1925, ma noi ci riferiamo a un testo del 1929), il quale aveva collaborato con Wertheimer sul fenomeno della percezione. Kohler aveva osservato

molto a lungo attività di scimpanzé e, contrapponendosi alla teoria di Thorndike che spiegava il loro comportamento in termini di prova ed errore nelle attività di procurarsi il cibo servendosi non solo delle mani ma anche di attrezzi, propose invece di interpretare tale comportamento come processo organizzato elaborato. A convincerlo di questa possibilità fu un fatto determinante: la fase dell'apparente estraniamento; capitava cioè, a volte, che lo scimpanzé, pur immerso nell'importante e per lui determinante problema di procurarsi il cibo, si allontanava momentaneamente dal problema per volgersi ad altro, per esempio all'inserimento di un bastone in un altro, problema diverso ma funzionale, come si dimostrava poi, allo scopo finale. In un processo tutto di prova ed errore, lo scimpanzé avrebbe dovuto insistere ed insistere sempre nello stesso modo, ossessivamente, anche con risultati negativi. Questa illuminazione, pensiero improvviso, sorgere di un'idea, eureka, venne chiamata insight e poi il termine è rimasto. Kohler suppose che il pensiero e il problem solving non sono solo la semplice somma di stimoli-risposta, ma che deve in qualche modo avvenire una percezione globale del problema come totalità funzionale. Insomma, il problema è una struttura complessa che, però, può essere intuita anche con un atto unico, in un contesto nuovo. Insight è anche questo, questa visione illuminata con un colpo d'intuizione strutturale. La soluzione di un problema avviene subito dopo che il soggetto riceve l'illuminazione e "vede" nel contesto problematico, come d'improvviso, come dall'esterno, una configurazione non olistica ma strutturata degli elementi del problema.
Kohler interpretò questo comportamento anche nell'essere umano in termini di insight, di conflitto, di forze mentali dinamiche, in ricerca dell'equilibrio verso un'organizzazione (più intuitiva, percettiva, però, che non culturale o intellettuale o logica cioè come tendenza naturale). Finché la struttura fondamentale del problema non è colta in una visione d'insieme strutturato attraverso l'insight, la situazione problematica non è neppure riconosciuta come significativa e dunque il problema non è risolubile.

Fu però il lavoro di M. Wertheimer (1959) a chiarire il significato delle idee di struttura e di insight nell'ambito più specifico dell'insegnamento (e in particolare, proprio della matematica e del problem solving, ambito prediletto dallo psicologo praghese).
Dal laboratorio, dove studiava la percezione, egli passò nelle aule, dove studiò gli allievi; il pensiero che comprende una struttura venne da lui ribattezzato "pensiero produttivo", un termine che ha avuto poi molta fortuna. È celeberrimo l'esempio che egli stesso chiamò "del parallelogrammo". Assistendo a lezioni in aula, aveva osservato che tutti i ragazzi avevano ben compreso come applicare la nota formula: base per altezza, nel calcolo dell'area di parallelogrammi che avessero una forma standard come la seguente.



Allora egli decise di proporre lo stesso problema ma relativamente a un altro parallelogrammo, del tutto simile al precedente ma tale che l'altezza che i ragazzi avevano identificato con quella data verticale in quella data posizione, avesse il piede "fuori" dalla base. Vi furono allora reazioni di grande disagio da parte dei ragazzi.



Alcuni dichiararono di non poter più risolvere il problema, dato che non si poteva applicare la formula; altri che occorreva una formula nuova; altri che «non è giusto»; altri rinunciarono, imbarazzati dal genere di figura; altri non vollero prendere in esame un problema che non rispettava gli accordi; ...
Secondo Wertheimer le difficoltà nascono dall'impatto con una struttura non buona: questa nuova figura suggerisce pezzi sporgenti, ha una forma imperfetta, risulta imbarazzante. Dato che i ragazzi, sempre secondo Wertheimer, non avevano fatto propri i principi strutturali sui quali si basa l'applicazione della formula dell'area del parallelogramma, essi avevano la tendenza a identificare quella formula con quella data forma e, spiazzati da una forma giudicata imbarazzante, non buona, necessariamente negavano che la si potesse ancora applicare. Secondo Wertheimer, mentre nel bambino (e, più in generale, nell'essere umano) c'è la tendenza a vedere strutture, totalità organizzate, la scuola insegna pezzi isolati di realtà, algoritmi scollegati tra loro, che quindi molto a fatica possono penetrare a fondo nella cultura individuale (anch'essa struttura complessa e organizzata). Il pensiero si fa "produttivo" quando elabora una rete organizzata di competenze basate su soluzioni che Wertheimer chiama "eleganti, vere e chiare", cioè non legate a un esempio riduttivo e concreto, ma a relazioni (in questo caso, per esempio, la capacità di ricondurre in ogni caso il parallelogrammo al rettangolo equiesteso, per il quale abbia senso la formula "base per altezza" in forma forte). Da una parte c'è dunque un apprendimento meccanico (anch'esso genera pensiero, ma pensiero non-produttivo) e dall'altra c'è un apprendimento significativo (che crea pensiero produttivo).
Köhler propone altri esempi: il calcolo della somma l + 2 + 3 + … + 99 + 100 [felicemente effettuata con un colpo d'intuizione da Gauss a meno di 10 anni di età: (1+100)×50]; il numero di pannelli necessari alla copertura di una scalinata; ecc. (Ma su questi non ci soffermiamo oltre).
Si tratta sempre di avere un insight basato sulla visione d'insieme, ma un insieme dotato di struttura, non disordinato, del problema; non solo, ma lo psicologo gestaltista insiste anche sul fatto che, anche se il problema non è di natura geometrica (come la somma di Gauss) il colpo d'occhio è necessario perché la soluzione del problema, nella fase di insight, si "vede", dato che il cervello umano elabora uno schema, una rappresentazione;

non solo, ma tende a vederla sotto una forma bella, buona, elegante e rifiuta (o comunque non apprende) da una forma "brutta".
Dunque: si passa dalle singole parti di un tutto, al tutto organizzato in una struttura che assume una buona forma, attraverso insight.
Ma come avviene tutto ciò? C'è un processo graduale che si sviluppa o c'è solo un atto complesso finale? Si può educare la visione d'insieme strutturata? Si può educare l'insight? Chi risolve un problema, lo fa d'un solo colpo, o segue una successione di fasi che si possono riconoscere e distinguere? Quali sono, allora, tali fasi? Quale è quella principale?
La risposta di Wertheimer è, in un certo senso, deludente per l'insegnante; in contrasto con l'enfasi posta nel segnalare l'interesse verso il pensiero produttivo e l'insight, egli stesso asserisce che non sembra facile trasformare ciò in prassi didattica, in aiuto concreto per gli allievi. Anche nella definizione di che cosa siano "struttura" e "pensiero", nella definizione delle fasi nel complesso sistema di risoluzione di un problema, si hanno difficoltà.
Wertheimer in particolare (ma un po' tutti i gestaltisti che si sono occupati dell'insegnamento) predilige esempi, anche attraenti e significativi, ma poi non si arriva a una elaborazione teorica di attività didattiche.

Da qui nasce, tuttavia, una dicotomia interessante, fino a pochi anni fa molto in voga:
• processo bottom-up (dal basso verso all'alto), cioè dalle singole parti al tutto, alla visione d'insieme;
• processo top-down (dall'alto al basso), cioè dal totale al particolare o, se si vuole, dalla eventuale disorganizzazione complessiva, alla ristrutturazione in parti semplici dei componenti elementari.
È ben noto che in queste due voci della dicotomia si sono spesso celati due modi diversi di intendere la filosofia stessa del comportamento didattico:
• prima elementi, contesti, esempi, ..., e poi la "scalata" verso la generalizzazione, la logica, la struttura;
• viceversa.
Oggi, però, la tendenza è più rivolta a distinguere casi: a seconda del contesto o della situazione problematica, vi sono casi nei quali conviene il processo b.-u. e altri nei quali sembra più adatto il processo contrario. Questo tipo di attenzioni era riemerso e divenuto di gran moda dopo l'introduzione dell'informatica nella scuola: algoritmi interpretati nei due processi opposti sono stati studiati e proposti in grande quantità. Per poi ri-spegnersi.
Proprio a questo tipo di analisi si dedicò un altro psicologo della Gestalt, allievo di Wertheimer, Karl Duncker (che pubblicò i suoi risultati principali nel 1945, ai quali ci riferiamo qui). Egli studiò il comportamento di esseri umani adulti alle prese con problemi complessi, per analizzarne il comportamento e giungendo così a mostrare che, in tale caso, i soggetti rielaborano più e più volte il problema, riformulandolo in continuazione, fino ad arrivare a una relazione funzionale con la struttura del problema: a quel punto scatta la soluzione. Ma seguiamo le parole stesse di Duncker (1945, pp 7-8):

> La forma finale di una particolare soluzione non si raggiunge generalmente in una sola tappa a partire dalla formulazione originaria del problema: al contrario, il principio, il valore funzionale della soluzione emerge tipicamente per primo, mentre la forma finale della soluzione in questione si sviluppa soltanto a mano a mano che questo principio diventa sempre più concreto. In altre parole, le proprietà generali o «essenziali» di una soluzione precedono geneticamente le proprietà particolari; queste ultime si sviluppano a partire dalle prime.

(Tale brano riportato anche da Resnick e Ford, 1991, p. 135).
Le varie fasi di risoluzione sono determinate dal sorgere di conflitti produttivi: «Che cosa bisogna cambiare in questa mia impostazione, sembra dire tra sé e sé il risolutore, visto che non va?». L'analisi può essere dall'alto e dunque verso una classe di risoluzioni particolari, e con una costante attenzione all'analisi continua degli obiettivi: che cosa è realmente richiesto dal problema, per evitare dispersioni improduttive. Viceversa, dal basso si mettono in evidenza i dati, i "materiali", ciò di cui si dispone. In base alle sue moltissime esperienze,[1] Duncker arrivò a prediligere le soluzioni dall'alto (che chiamò "organiche", in contrasto con le opposte, "meccaniche"), ma riconobbe l'effettiva presenza e il ricorso a entrambi i processi da parte dei risolutori in base a una convenienza effettiva o a uno stile personale.
Da questi studi (e da altri) non poté mancare l'affermazione di una teoria gestaltica dell'apprendimento, soprattutto legata all'opera di G. Katona (1967) pubblicata tra il 1940 e il 1967.
Non riporteremo le pur interessanti prove eseguite sull'apprendimento della matematica da Katona, ma ci limiteremo ai risultati di esse, traendoli dal testo appena citato:
a) l'apprendimento mnemonico è un processo diverso dall'apprendimento per comprensione;
b) l'apprendimento per comprensione implica sostanzialmente lo stesso processo del problem solving: la scoperta di un principio;
c) sia il problem solving sia l'apprendimento significativo consistono principalmente nel modificare, o organizzare, il materiale; il compito di tale organizzazione è di stabilire, scoprire o capire una relazione intrinseca.
La forza di questa posizione si è affievolita nel tempo, ma possiamo tentare di farla riemergere: Katona si opponeva, con questi esperimenti e con questi risultati, al modello psicologico totalizzante, allora di moda, che esprimeva e spiegava tutto in termini di stimolo-risposta (S-R): condannare l'apprendimento mnemonico come apprendimento di serie B, come puramente meccanico e dunque non produttivo, era una battaglia dura, in quel periodo, contro corrente.
Oggi tutta la polemica è ridimensionata. Da un lato non c'è più una tendenza così forte a spiegare tutto in termini di S-R. Dall'altro, oggi si accetta che "imparare a memoria" non è in alternativa necessaria a "capire"! Anzi: studi recenti tendono a mostrare che, come dicono Resnick e Ford (1991),

> imparare a memoria è un processo attivo, che dipende da principi attivi molto simili a quelli proposti da Katona. Le ricerche mostrano che la tendenza a organizzare l'informazione, come mezzo per rendere più efficace la memoria, cresce con l'età e questa crescita è in rapporto con prestazioni migliori in compiti relativi alla memoria.

A suffragio di questa affermazione, Resnick e Ford citano lavori di Kreutzer, Leonard, Sister e Flavell (1975). Non è escluso, cioè, ed è anzi usuale, che la ritenzione a memoria sia facilitata dal riconoscimento di un principio che lega i componenti per esempio di una sequenza numerica da memorizzare; anzi: questo è quel che tende ad avvenire davvero.
L'organizzazione in una struttura generale delle informazioni da memorizzare riduce il numero degli elementi da immagazzinare a pochi ed essenziali. Ciò facilita la ritenzione a memoria per due motivi principali:
- minor numero di "cose" da ritenere,

[1] Tra l'altro, proprio tratte dalla matematica; il lettore che ne volesse sapere di più segua le indicazioni bibliografiche.

- la struttura generale che le lega dà una ragione logica agli oggetti nella loro globalità facendoli apparire come un tutt'uno, piuttosto che come un insieme sparso di dati (buona-cattiva forma, ancora).

È proprio sulla base delle esperienze di Katona che nasce l'idea dell'apprendimento "per scoperta". L'idea di base è che ai bambini venga lasciata ampia libertà di manipolare ed entrare a contatto con il materiale disponibile, fino a che essi stessi giungano a creare relazioni (tendenza, questa, naturale nei processi dell'essere umano, secondo i gestaltisti); la scoperta di queste relazioni è il succo dell'apprendimento.

Naturalmente ogni insegnante sa bene che non sempre questa ipotesi teorica è poi quella che si verifica nella pratica ... È così nata l'idea della "scoperta guidata": è l'educatore che porta gli studenti passo passo attraverso un cammino che va dai dati, dagli oggetti, dai materiali a disposizione, verso l'obiettivo cognitivo cui si vorrebbe giungere; ma l'educatore si limita a fare da guida, lasciando agli allievi l'ebrezza, il gusto, la soddisfazione di compiere il passo finale, quello della scoperta della regola, della relazione, della legge o della soluzione a seconda dei casi (siamo in piena teoria delle situazioni). Parrebbe che quanto "scoperto" abbia una permanenza più profonda e più duratura in memoria; ci si deve dunque esprimere in termini di "maggior interiorizzazione" dei concetti scoperti rispetto a quelli acquisiti in altra forma. La maggior interiorizzazione dovrebbe facilitare il processo di. richiamare dal profondo in superficie regole e concetti nelle fasi di risoluzione dei problemi. In più: si ha apprendimento reale solo se l'allievo si fa carico personale del proprio apprendimento (il che è una delle basi fondamentali della teoria delle situazioni in didattica della matematica).

Purtroppo (ed è un fenomeno mondiale) l'idea di "apprendimento per scoperta" è stata snaturata e, nella prassi didattica, si è molto banalizzata; per cui, mentre vari studiosi (citati con estrema accuratezza da Resnick e Ford, 1991, p. 140) si dedicavano all'analisi dettagliata delle fasi di tale processo e si ponevano dubbi sul reale senso (psicologico) di esso, nella prassi scolastica sembra di poter dire che quasi non si è avuta eco di questi studi. Tanto più sono necessarie riflessioni in proposito, se si pensa che Gagné e Brown (1961) suggeriscono la conclusione che:

> Quando scopo dell'insegnamento sono la ritenzione nella memoria e il transfer, può essere altrettanto efficace (e di solito è più efficace) mostrare direttamente il principio piuttosto che chiedere agli studenti di scoprirlo.

[Molto poi ci sarebbe da dire sugli attuali studi relativi alla memoria; mentre in passato si era distinta una classificazione tra memoria a brevissimo, breve, medio, lungo, lunghissimo termine, gli studi di Craik e Lockhart (1972) sembrano dimostrare (ed è tesi oggi ben accetta nel mondo degli psicologi) che tale distinzione non ha più molto senso, mentre ne ha l'idea di "livelli di elaborazione" dell'informazione che sembrano poter avvenire a profondità variabile].

Dunque, lo psicologo gestaltista che s'occupa di insegnamento considera il soggetto che apprende come un organizzatore di percezioni e di esperienze. Da ciò emerge la necessità di un insegnamento "a spirale" soprattutto della matematica. A ogni "passo" di tale spirale, l'insorgenza di un insight adatto, favorito semmai da un attento procedere per scoperta, fornisce una maggior presa di possesso della situazione nel suo complesso, della struttura; e una maggior capacità di elaborare visioni globali che portano dunque a una sempre più matura consapevolezza. Risolvere problemi è così assimilabile a un allenamento e poiché tutto ciò è affidato all'insight, importante torna a essere una l'idea di favorire l'insight stesso. Ciò non può non ricordare Polya (1967, 1970, 1971). Questo

autore, anche se non possiamo classificarlo tra i gestaltisti, fu certo influenzato da questo modo di vedere e la sua posizione è storicamente collocabile all'interno di questo processo.
A conferma dell'educabilità dell'insight, ci pare si possa citare ancora una volta Maier con i suoi esperimenti delle due corde appese al soffitto e sulla fissità funzionale: così come lo sperimentatore, con un gesto apparentemente innocuo e neutro (qual è quello di far dondolare casualmente una corda urtandola), fa scattare un'idea, così l'insegnante che guida la scoperta può farlo con la sapienza e l'intelligenza adatte.
Non mancano posizioni assai critiche nei riguardi della Gestalt in generale e dell'insight in particolare:

> L'insuccesso più illustre è fornito dalla psicologia della Gestalt con il concetto dell'insight. L'insight corrisponde al magico passare da un problema non risolto a uno risolto, senza che né il solutore sappia esplicitare come abbia fatto, né lo sperimentatore abbia la più pallida idea di che cosa è successo.

Così scrive B. Bara (1990) (p. 167); e prosegue poi (p. 168):

> Benché l'aspetto miracoloso dell'insight non ne mascherasse la totale inconsistenza da un punto di vista esplicativo, il fatto che fosse preso sul serio la dice lunga su quanto i teorici disperassero di poter mai capire come un problema, non importa se semplice o difficile, potesse venir risolto.

A questo punto entrano in scena Allen Newell e Herbert Simon (Premio Nobel, quest'ultimo, nel 1982) (1972); essi, allo scopo di studiare GPS (General Problem Solver), un programma che si pensava destinato a risolvere problemi in generale, analizzarono in profondità i processi messi in atto dall'essere umano per risolvere problemi di qualsiasi tipo, ma principalmente inerenti giochi e matematica; essi seguirono la strategia di far parlare liberamente i soggetti mentre risolvevano problemi, proprio per avere elementi di analisi dei processi "interni", grazie a questi indizi. Uno dei risultati più celebri fu quello di un solutore di giochi di criptoaritmetica, quelli in Italia famosi grazie alla *Settimana Enigmistica*: a lettere diverse associare cifre diverse per far sì che la "operazione" seguente sia corretta:

DONALD+
GERALD=
ROBERT

Attraverso questi studi, si può giungere a formulare le seguenti quattro fasi di risoluzione di un problema:
- riconoscimento del problema;
- definizione del problema; qui entra in gioco l'idea di "buona definizione di un problema"; si dice che un problema è tale se:
    - l'insieme delle possibili strategie è noto;
    - i risultati della scelta e dell'applicazione di ogni strategia sono noti fino a un punto significativo;
    - chi sta per prendere la decisione sulla strategia da seguire è in grado di quantificare la probabilità di eventi incerti;
    - chi sta per prendere la decisione sulla strategia da seguire è in grado di stabilire una sorta di "grado di utilità" di tale strategia rispetto all'obiettivo posto;
- risoluzione vera e propria del problema;
- controllo della soluzione trovata.

Nonostante le precedenti critiche, che sentiamo di dover condividere, molti continua a far uso dell'ambiguo termine insight solo per indicare la presa di coscienza del fatto che il problema può essere aggirato ricorrendo ad altro (altre competenze, analogia, ...).
Abbiamo un po' sorvolato sul problema della "forma buona" che, invece, è centrale per la teoria gestaltica; suggeriamo di guardare Resnick e Ford (1971), pp. 68-73, ed eventualmente consultare la bibliografia ivi proposta.

Il contributo di Polya

Decisamente, in questo campo il contributo di G. Polya (1887-1985) è stato notevole; non si può negare che le sue opere degli anni '40 e in particolare *How to solve it* (in italiano: *Come si risolvono i problemi*, 1983) sono una pietra miliare ancora oggi per chiunque si dedichi a questo tipo di ricerche e studi.
In un altro suo libro (1971, ma pubblicato nel 1962), Polya scrive:

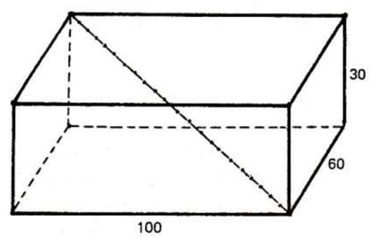
> In primo luogo voglio essere preciso su quale sia il primo e principale obiettivo dell'insegnamento della matematica, soprattutto nella scuola secondaria: insegnare a pensare. Ciò significa che l'insegnante non deve solo fornire informazioni, ma anche fare in modo che gli allievi sviluppino l'abilità di utilizzare le informazioni ricevute, insistendo sul saper fare, su atteggiamenti favorevoli, su abiti mentali desiderabili. Ma devo precisare due punti: a) Il pensiero di cui parlo non è un sognare a occhi aperti, ma un "pensare diretti a uno scopo" o un "pensare volontario" [e qui Polya cita W. James], un "pensiero produttivo" [e qui Polya cita M. Wertheimer]. Questo pensiero in prima approssimazione può essere identificato con la risoluzione di problemi. Comunque l'abilità nel risolvere problemi la considero la principale delle finalità scolastiche. b) Il pensiero matematico non è puramente "formale", non è preoccupato solo di assiomi, definizioni, prove rigorose; molte altre cose gli appartengono: generalizzare a partire da casi osservati; argomenti induttivi, argomenti per analogie, riconoscere un concetto matematico in una situazione concreta o saperlo estrarre da essa. L'insegnante ha molte opportunità per abituare i suoi alunni a questi processi informali di gran valore: insegniamo a provare con ogni mezzo, ma anche a congetturare. (...) Il saper fare in matematica è l'abilità a risolvere problemi, a trovare prove, a criticare argomenti a favore, a usare il linguaggio matematico con una certa fluidità, a riconoscere concetti matematici in situazioni concrete» (cit. anche in M. Pellerey, 1987).

Imre Lakatos ha approfondito questa dialettica del pensiero matematico, dibattuto tra congetture, dimostrazioni e confutazioni, anche se, mentre Polya si è dedicato all'euristica, egli ha portato la propria attenzione sulla dialettica relativa al rigore di una dimostrazione.
Scrive M. Pellerey (1987):

> Lo sviluppo del sapere matematico inteso sia come patrimonio consolidato dell'umanità, sia come patrimonio consolidato e posseduto stabilmente dal singolo, si basa essenzialmente sull'emergere di congetture che intendono rispondere a un qualche gruppo di problemi rilevanti e significativi. Una congettura è cioè in genere una affermazione che appare ragionevole e che fornisce spiegazioni o soluzioni plausibili a una qualche questione, ma il cui valore di verità non può dirsi definitivamente acquisito. Essa può acquisire sempre più consenso oppure essere anche assai presto abbandonata, a seconda di nuove conferme o falsificazioni. Ma il più spesso delle volte essa non viene del tutto abbandonata, piuttosto viene modificata o precisata, restringendo il suo campo di applicazione. La dinamica viene così a

svolgersi tra momenti avventurosi e inventivi, che generano o precisano le varie affermazioni, e momenti di controllo critico e di verifica, che esaminano la loro validità e affidabilità.

Secondo Polya, la risoluzione di un problema è un processo che consta di quattro fasi:
• capire il problema;
• ideare un piano per trovare la soluzione;
• eseguire il piano;
• ritornare indietro per verificare il procedimento e controllare il risultato.
È famosissimo un esempio emblematico proposto da Polya:
"Un motociclista acrobata vuole percorrere in moto una fune, tesa tra l'angolo superiore sinistro della parte posteriore di un'aula magna e l'angolo inferiore destro della parte anteriore dell'aula. Le dimensioni dell'aula magna sono di 100 per 60 per 30 piedi. Gli occorre sapere quanto deve essere lunga la fune, per coprire la distanza che intende percorrere. Come potreste aiutarlo a trovarla?".
Polya immagina poi un ragazzo di fronte al problema.
"Qual è l'incognita?", si domanda, "Quali sono i dati?".
L'incognita è la lunghezza della fune, i dati sono le misure della stanza.
"Qual è la condizione da soddisfare?".
Ecco la rappresentazione grafica che ci si deve fare, che ci si può fare, della situazione.



A noi interessano le fasi della risoluzione del problema e non il contenuto matematico specifico. A questo punto il ragazzo cerca di ricordare problemi analoghi a questo, già visti, qualcosa che l'ispiri. E gli viene in mente che, trattandosi di angoli retti e di triangoli rettangoli, c'è effettivamente qualche cosa di già visto che può aiutarlo! È qui attorno che scatta l'insight: si sostituisce il problema complesso reale con un modello geometrico nel quale la nuova domanda è: dati i cateti trovare l'ipotenusa.
Questo sembra essere il passo decisivo: cercare la struttura, riformulare il problema, guardare al problema con occhi nuovi; a questo punto, il risolutore può formulare un piano per risolvere il problema.
Più in generale, riportiamo qui una pagina tratta da un libro di Polya (il "solito": *How to solve it*); in essa le varie fasi sono molto ben dettagliate e specificate.
Si noti che spesso gli esempi di Polya sono di carattere geometrico, come, d'altra parte, quelli di Wertheimer: la rappresentazione in generale e quella spaziale in particolare sono un aspetto essenziale del pensiero matematico, forse il più elevato.

	Capire il problema
Primo Devi capire il problema	*Qual è l'incognita? Quali sono i dati? Qual è la condizione da soddisfare?* È possibile soddisfare la condizione? La condizione è sufficiente per determinare l'incognita? O insufficiente? O superflua? O contraddittoria? Disegna la figura. Introduci notazioni adatte. Separe le varie parti della condizione. Puoi scrivere quali sono?
	Ideare un piano
Secondo Trova la relazione tra i dati e l'incognita. Può darsi che tu debba considerare altri problemi se non si può trovare una relazione evidente. Alla fine dovresti ottenere un *piano* di risoluzione.	Lo hai visto prima? O hai visto lo stesso problema in una forma leggermente diversa? *Conosci un problema simile*? Conosci un teorema che potrebbe essere utile? *Osserva l'incognita*! Cerca di pensare a un problema noto che abbia la stessa incognita o una simile. *Ecco un problema che è simile al tuo e che è stato risolto precedentemente. Potresti usarlo*? Potresti usarne il risultato? Potresti usarne il metodo? Dovresti introdurre qualche altro elemento per poterlo usare? Sapresti riformulare il problema diversamente? Sapresti riformularlo in modo ancora diverso? Ritorna alle definizioni. Se non sai risolvere il problema assegnato, cerca di risolvere prima un problema simile. Puoi immaginare un problema più facile da affrontare, che abbia qualche relazione con questo? O un problema più generale? O un problema analogo? Sapresti risolvere una parte del problema? Mantieni solo parte della condizione e lascia stare l'altra: quanto è distante l'incognita così determinata, come può variare? Puoi dedurre qualcosa di utile dai dati? Puoi pensare ad altri dati utili per trovare l'incognita? Puoi cambiare l'incognita o i dati, o entrambi se occorre, in modo che la nuova incognita e i nuovi dati siano più vicini tra di loro? Hai usato tutti i dati? Hai usato tutte le condizioni? Hai tenuto conto di tutte le nozioni essenziali contenute nel problema?
	Eseguire il piano
Terzo *Esegui* il tuo piano	Mentre esegui il tuo piano di risoluzione, *controlla ogni passaggio*. Puoi vedere con chiarezza se è esatto? Puoi provare che è esatto?
	Guardare indietro
Quarto *Esamina* la soluzione ottenuta	Puoi *controllare il risultato*? Puoi controllare il ragionamento? Puoi ottenere il risulato in modo diverso? Puoi vederlo a prima vista? Puoi usare il risultato o il metodo, per qualche altro problema?

Per arrivare a ciò, sembra essenziale iniziare a ... manipolare (concretamente e con disegni, rappresentazioni ecc.) lo spazio, il più presto possibile.
Va comunque precisato che Polya ha trattato anche di analogie formali non geometriche per esempio in teoria dei numeri, anche come matematico professionista. È ben nota e assai apprezzata la sua elegante dimostrazione dell'uguaglianza:
$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Ed ecco una bella frase di Polya tratta dal suo libro sulla scoperta matematica (1971, ma pubblicato nel 1962, Vol. I, p. 118):

> Risolvere problemi è il compito specifico dell'intelligenza e l'intelligenza è la dote specifica dell'uomo. La capacità di aggirare un ostacolo, di prendere una via indiretta quando non si

presenta nessuna via diretta, innalza l'animale intelligente al di sopra di quello ottuso, eleva l'uomo enormemente al di sopra degli animali più intelligenti e gli uomini di talento al di sopra dei loro simili.

Quell' "aggirare l'ostacolo", quel "prendere una via indiretta", non possono non ricordare gli esperimenti sulle scimmie di Kohler: esse, visti vani i tentativi di arrivare a prendere le banane direttamente, si guardano attorno per vedere se ci sono materiali adatti ad aggirare l'ostacolo; l'insight in questo caso potrebbe essere: si possono prendere le banane, non necessariamente con le mani. Questo rimandare ad altro, questo "aggiramento" facilita l'insight (che è, per Polya, educabile). È per questo che c'è chi tende ad inserire Polya all'interno del pensiero strutturale della psicologia gestaltica.
Come letture complementari, possiamo suggerire: Polya (1967, 1970. 1971), Lakatos (1976), Pellerey (1987, 1991b), Aebli (1961), Speranza (1989, 1990, 1991), D'Amore e Plazzi (1990).

Approcci psicometrico e comportamentista

Ricordiamo ora l'approccio cosiddetto psicometrico. Secondo gli studiosi aderenti a questa teoria, il problema è quello di studiare la natura dell'intelligenza, ma esaminandone le manifestazioni esterne; essi distinguono tra problem solving e problem posing proprio per sottolineare le diverse condizioni esterne nel più vasto e comprensivo fenomeno nello studio dei problemi. Che cos'è allora la risoluzione di un problema? Si tratta della "scelta di programmi esistenti"; mentre l'individuazione di problemi è "la scelta di programmi in un insieme più ampio che contiene quelli già esistenti e quelli disponibili nel futuro" (Gagné, 1976).
La risoluzione di un problema produce un cambiamento nella capacità del soggetto: essa determina l'acquisizione di una regola o di una regola del secondo ordine, o addirittura di carattere meta, un modo di comportarsi in determinate circostanze. Tale acquisizione provoca dunque un'interiorizzazione che influisce fortemente sulle condizioni interne e sul modo di accettare e utilizzare quelle esterne. È ovvio che per essi le differenze individuali sono significative e interessanti: si tratta, per esempio, della quantità di dati immagazzinati, della maggior facilità di richiamare le nozioni possedute, dell'abilità di selezionare aspetti significativi rispetto ad aspetti devianti, della fluidità maggiore o minore nel formulare ipotesi, ...

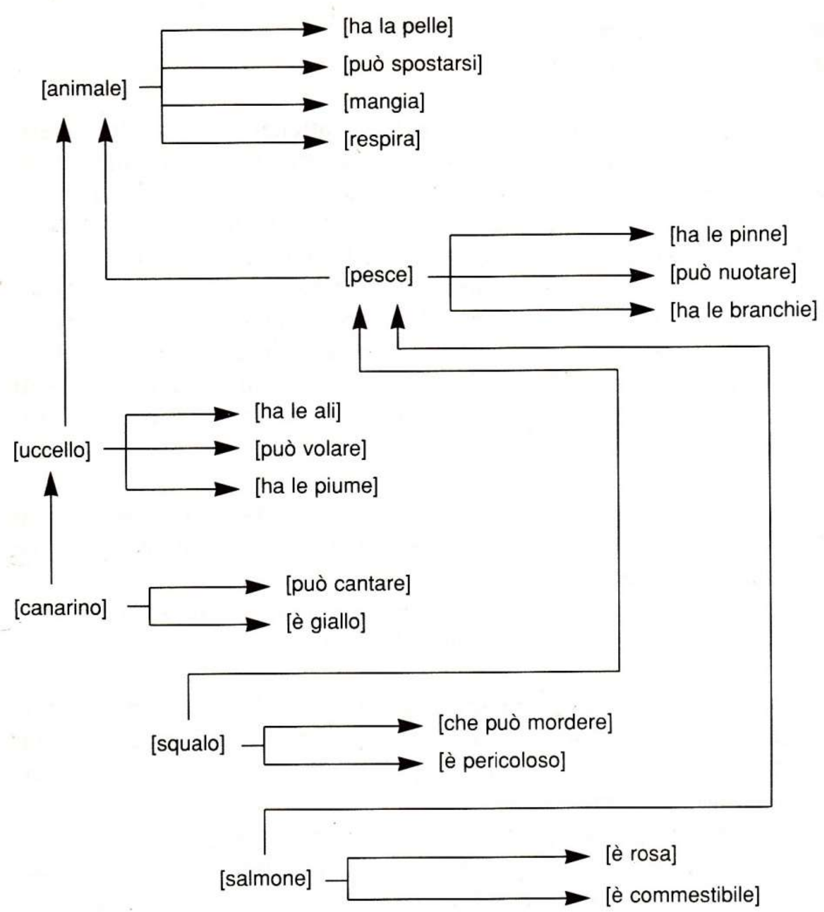
I comportamentisti, invece, fanno ricorso a spiegazioni tutte legate al principio S.-R. (stimolo-risposta), senza troppe distinzioni tra processi semplici e complessi. Essi individuano una terna significativa di elementi: stimolo, risposta, elemento di rinforzo; la causa della sconfitta di fronte alla risoluzione di un problema sarebbe legata al trascurare uno di questi tre elementi; vi sono varie motivazioni possibili del fallimento, per esempio legate al "disturbo" nella ricezione degli stimoli, oppure alla contraddizione tra due stimoli che producono risposte in conflitto. Se tutto ... fila liscio, se cioè il soggetto si lascia guidare dalle regole nel seguire uno stimolo, questo fornirà una risposta, la cui positività sarà a sua volta elemento di rinforzo, ..., in una successione di S.-R. positivi.
I comportamentisti danno una grande rilevanza agli stimoli verbali (nella stessa misura nella quale i gestaltisti la danno agli stimoli percettivo-figurativi); ciò li porta a uno studio attento e meticoloso degli stimoli verbali contenuti nei problemi. Lo stimolo verbale per eccellenza è quello che richiama alla mente regole espresse in precedenza; anzi, in

un'accezione "forte" del comportamentista Skinner, già più volte ricordato, il problem solving stesso consiste nell'azione del richiamare alla mente e applicare una risposta appresa in precedenza. D'altra parte, abbiamo già visto che per Gagné (1976) risolvere un problema è scoprire una combinazione di regole già note, combinazione applicata «per raggiungere una soluzione per una situazione nuova e problematica».
Ma proprio in questa attività si realizza, secondo il nostro, l'apprendimento di forma più elevata.
Su questi temi si possono proficuamente consultare anche Gagné (1962, 1973) e Forehand (1976).

L'approccio cosiddetto informatico e la teoria delle reti semantiche

L'approccio cosiddetto informatico deve il suo nome al fatto che in esso si simula l'apprendimento e la soluzione di problemi come se il soggetto che apprende e che risolve sia un calcolatore. In tale simulazione, ci si preoccupa soprattutto di programmi descrittivi, proprio allo scopo di *descrivere* il comportamento umano di fronte alla risoluzione di un problema, evitando quindi i programmi di carattere normativo. Un elemento di grande importanza in questo approccio è la "traduzione" del testo del problema, dal linguaggio quotidiano a un linguaggio adatto (algebrico, geometrico, schema, disegno, ...); ciò porta a evidenziare una terna di categorie fondamentali di parole: le variabili, i sostitutori, le forme (linguistiche) funzionali; il che chiama in causa la consapevolezza e la competenza, per esempio nello scegliere la funzionalità dei termini che entrano nel testo del problema. A forza di studiare simulazioni al calcolatore (o con il linguaggio del calcolatore) del comportamento umano, l'approccio informatico si è pian piano evoluto verso la formulazione vera e propria di programmi per il calcolatore, destinati alla risoluzione di tipi sempre più ampi di problemi. Si ha così un'interazione uomo-macchina nella quale all'uomo è lasciato il compito di scelta sul che cosa fare, mentre alla macchina sul come farlo.
Tra i fautori dell'approccio informatico, va posto anche Gagné (1976), o almeno i lavori di Gagné che studiano quei modelli che lui stesso ama definire addirittura "meccanici" o "elettromeccanici". Egli descrive le caratteristiche salienti di tali modelli, in quattro punti:
• azione sequenziale: da un insieme di eventi a un insieme di eventi: «il completamento di un certo stadio dipende dalla presenza di una certa capacità nello stadio precedente»;
• fenomeno di soglia: per avere effetto, un determinato stato deve raggiungere un certo livello di "intensità";
• risposte non graduate: un'azione o ha luogo o non ha luogo, non c'è una graduazione di effettività; uno stimolo c'è o non c'è, è riconosciuto o non lo è;
• connessioni multiple: un evento può contribuire a uno ma anche a più eventi successivi, non a uno solo necessariamente.
Sembra quasi che il processo di risoluzione sia affidato a comportamenti euristici in prevalenza; la scoperta deve essere un fatto individuale che difficilmente è mediabile sull'esperienza altrui: potrebbe ricordare la posizione di Polya (1971), quando spiega agli insegnanti la necessità del processo euristico di scoperta da parte degli stessi alunni, e non attraverso la mediazione da parte degli insegnanti. Quando Polya suddivide la risoluzione di un problema nelle sue quattro celebri fasi:
• comprensione,
• compilazione di un piano,

• sviluppo del piano,
• esame della soluzione,
il processo fondamentale su cui porre l’attenzione è quello euristico della scoperta personale; ciò non può non richiamare alla mente anche il cosiddetto “eureka” di Glaeser (1975, 1976, 1982, 1984).
Ma torniamo all’approccio che abbiamo chiamato informatico o “basato sulla elaborazione delle informazioni”. In questo contesto si tende a porre l’accento su eventi, azioni, manipolazioni delle informazioni, ordinandoli secondo sequenze; e lo scopo è quello di cercare di capire come le persone comprendono i concetti della matematica (dunque, rientra fra gli obiettivi anche quello di dare suggerimenti agli insegnanti su come insegnare la matematica e, soprattutto, di come farla apprendere).
Per entrare in tema, occorre preliminarmente distinguere tra:
• memoria di lavoro: nella quale l’informazione è immagazzinata temporaneamente per un uso immediato; qui si svolge l’effettiva elaborazione della informazione;
• memoria a lungo termine o memoria semantica: si conserva ogni informazione (è quel che l’individuo sa).
Sorgono subito vari problemi: che cosa vuol dire, esattamente, immagazzinare un’informazione? Il modo di archiviazione è specifico per la specie umana? Ci sono stili diversi? Questi stili influenzano la comprensione? Se sì, come? In che senso?
In prima approssimazione ci si può immaginare un elenco di dati e il ricordo o l’uso di un dato come lo sfogliare le pagine di questo elenco; ma si capisce subito che tale processo non è un buon modello di quel che capita davvero: l’uomo ricorda con tempi rapidissimi, istantanei, a volte; e connette un’informazione spontaneamente a un’altra: questo come si spiega con il modello dell’elenco? Capire, generalizzare e inventare sfuggirebbero a un’analisi del tipo “elenco”. Ciò ha spinto gli psicologi a immaginare che le memorie e le conoscenze non siano banali elenchi, ma magazzini organizzati e strutturati (ricordo gli studi di Anderson, 1976; di Anderson e Bower, 1973; di Norman e Rumelhart, del 1975, che non citiamo espressamente, consigliando l’analisi presentata in Resnick e Ford, 1991). (Il modello gestaltico della struttura è sempre presente, a ben vedere).
In un lavoro di Collins e Quillian del 1969, del quale si trova una descrizione dettagliata da parte di Resnick e Ford (1991), si dà un modello parziale di una struttura di conoscenza relativa alla memoria semantica che mostra possibili relazioni tra elementi e proprietà all’interno della categoria semantica “animali”.



In tale modello si ha sostanzialmente un ordinamento "gerarchico" delle conoscenze, strutturato proprio in base alle informazioni; ma tale gerarchia si trova realmente nella mente umana o è essa stessa elemento occasionale di rielaborazione e acquisizione? Su questo punto il dibattito, accesissimo agli inizi degli anni '80, non pare sopito ...

Con questa "teoria della rete semantica", com'è stata battezzata, molte capacità dell'essere umano vengono spiegate. Per esempio l'eccezionale rapidità con la quale un soggetto può dare risposte (pressoché immediate) a domande su questo tipo di questioni, anche di tipo generale. Per esempio, si noti che "ha la pelle" è proprietà generale degli animali e dunque non è trascritta tra le proprietà particolari che si trovano accanto a "canarino". Eppure (sono stati fatti esperimenti sui tempi di reazione) un soggetto cui viene posta la domanda se il canarino ha la pelle, immediatamente è in grado di eseguire il collegamento:

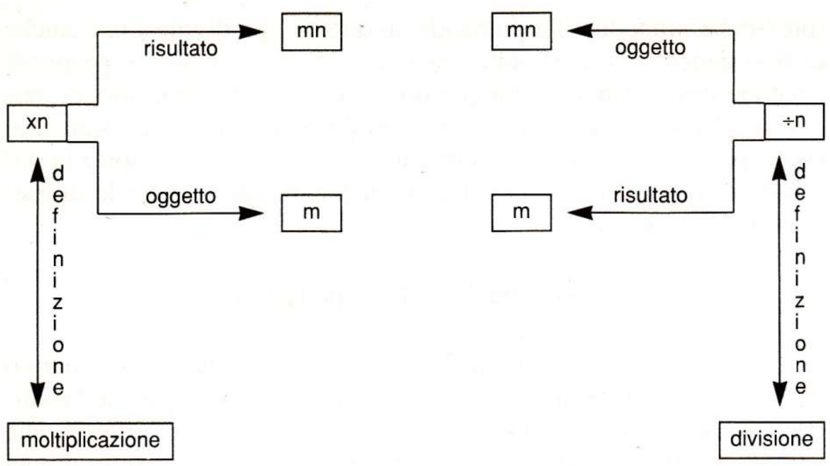
canarino → animale → ha la pelle → canarino

in un lasso di tempo brevissimo. Se però la domanda è se il canarino ha le ali, allora il tempo di reazione è minore perché la "distanza" tra "canarino" e "avere le ali", nel modello, è inferiore alla precedente. Il tempo di reazione individuale a una domanda su una rete rappresentante una struttura di conoscenza contenuta nella memoria semantica sarebbe dunque dipendente dalla "distanza" tra i concetti che si richiamano. Senza entrare

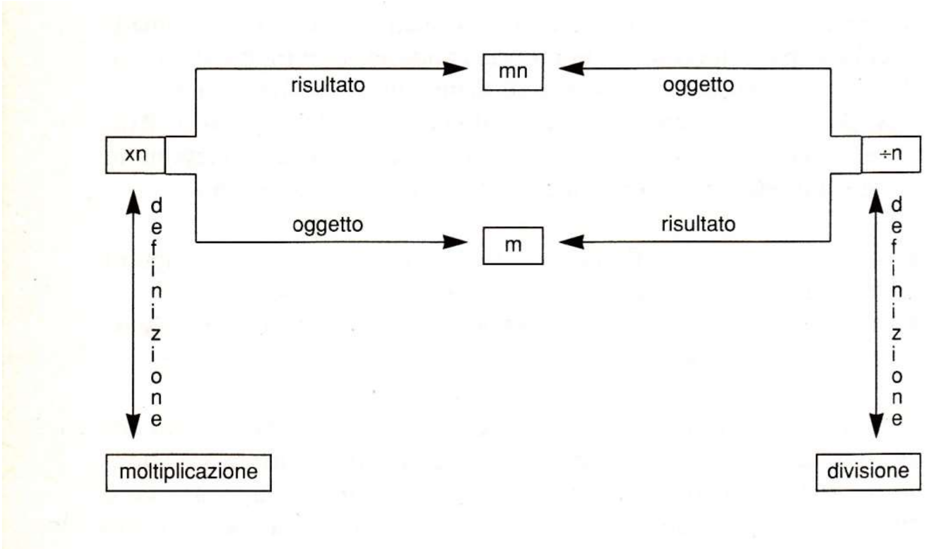
in ulteriori dettagli, con questo modello si spiega anche come le persone effettuano certe forme di deduzione, semplicemente "percorrendo" la rete.
Lungi dunque dall'essere un semplice elenco di informazioni, la conoscenza sarebbe questa struttura gerarchica organizzata e la mente umana sarebbe capace di costruire la propria conoscenza in modo attivo anche senza avere sempre a portata di mano una relazione diretta.

Si può cogliere una certa analogia tra le idee di Piaget, di Bruner e dei gestaltisti; ma i teorici della memoria semantica mettono in evidenza modelli rigorosamente legati a due fattori principali:
• ogni modello è specifico del contenuto di un particolare campo di conoscenza che è oggetto di studio in quel frangente;
• in un modello compaiono sì regole di comportamento ma anche relazioni concettuali.

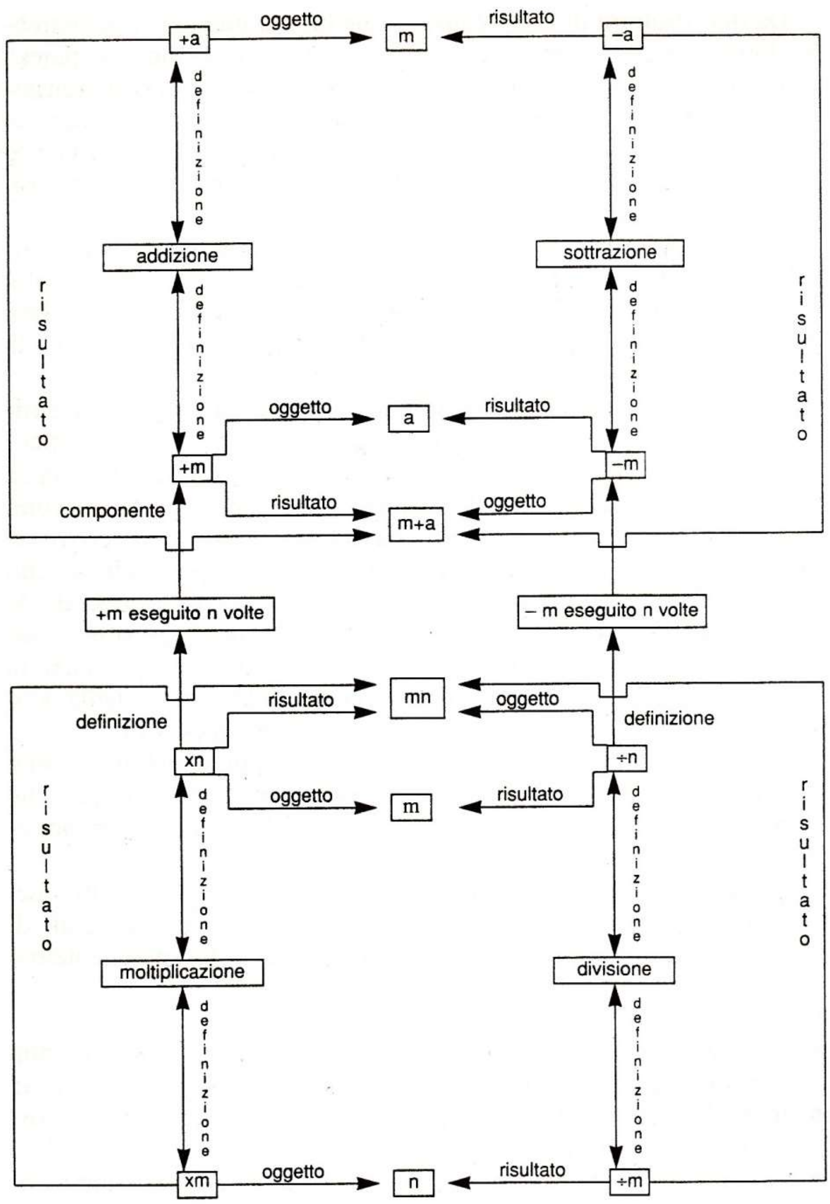
Nell'ambito di questi studi, parecchi sono coloro che si sono dedicati al campo di conoscenza matematica; in particolare Greeno ha dedicato tempo allo studio di relazioni tra moltiplicazione e divisione (Greeno, 1978).
In prima istanza, si hanno come due tronconi che distinguono nettamente le due operazioni tra loro.



Ma poi, pian piano, la comprensione sempre più profonda delle due operazioni porta a creare un collegamento e la costituzione di una più vasta rete unica.



Da due strutture di conoscenza, se ne ha ora una unica; si potrebbe dire che mentre prima c'erano due pagine di quel famoso ipotetico elenco, con conseguente dispersione per la ricerca di comprensione, in tempo e in competenza, ora c'è un'unica rete concettuale semantica, più comprensiva e potente. (Ciò non può non ricordare le teorie associazioniste, tant'è vero che a volte si parla, in questi casi, di neoassociazionismo).
Non è escluso poi che la rete si sviluppi sempre più, arrivando fino a comprendere altre operazioni, per esempio, in un colpo solo, addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (su questa fase più complessa, si veda Resnick e Ford, 1991, pp. 191-195).



Implicito in questo modo di vedere le cose è un obiettivo didattico: compito dell'insegnamento (in generale, matematico in particolare) è quello di aiutare lo studente ad acquisire una conoscenza "ben strutturata" delle singole materie; questa frase potrebbe voler dire creare reti semantiche molto complesse, vaste e comprensive, ma ben acquisite, per facilitare quel che prima abbiamo indicato con la terna "capire - generalizzare - inventare". Una rete concettuale complessa, ma salda, faciliterebbe queste capacità. È però necessario, a questo punto, tornare al primo dei due fattori citati poc'anzi: la vera utilità delle reti semantiche in campo didattico sta nella loro specificità (stiamo seguendo un lavoro di Greeno del 1976, analizzato dettagliatamente in Resnick e Ford, 1991).

Opponendosi agli obiettivi puramente comportamentali, Greeno propone obiettivi cognitivi, nei quali cioè si tenga conto di quel che le persone sanno rispetto a quel che fanno. Dunque, sì considerare il comportamento, ma anche una riflessione metacognitiva. Resta il problema di stabilire quali siano gli obiettivi cognitivi nel campo della didattica matematica, quali siano i criteri generali di una conoscenza ben strutturata, adatti a guidare lo sperimentatore nella ricerca. Sempre Greeno suggerisce questi tre:

• coerenza interiore della rappresentazione; ma tale coerenza non coinvolge questioni logiche ed è quindi ribattezzata "integrazione";

• grado di connessione dell'informazione con altre conoscenze possedute dal soggetto;

• corrispondenza tra la rappresentazione e ciò che deve essere compreso.

Sorge naturalmente il problema di valutare la minore o maggiore presenza di ciascuno di questi criteri, il che non è banale; se si potessero vedere le reti semantiche presenti nel cervello di un individuo, sarebbe abbastanza facile; ma, non essendo così, si devono ideare forme di valutazione basate sul comportamento dei soggetti sottoposti a stimoli particolari.

Per quanto riguarda l'integrazione, si cerca di valutare il grado secondo il quale i concetti sono associati tra loro in più modi, ma ordinatamente; si scopre così che esistono nelle reti nodi di maggior "peso", perché da essi si dipartono molte frecce. Per la valutazione della connessione non sembrano esserci mezzi diversi dalle interviste indirette o dalle prestazioni nel problem solving; si possono suggerire strategie tese a creare nuove connessioni in rete e vedere le reazioni. Però, anche l'effettuazione di un compito da parte di un soggetto non è garanzia dell'avvenuta costruzione di una freccia stabile nella rete (in attività di questo genere sono preponderanti i resoconti di "casi" che finiscono con il divenire emblematici). Infine, per la valutazione della corrispondenza è stato suggerito il confronto tra i modelli consapevolmente posseduti dai soggetti (in genere studenti) e quelli posseduti dai cultori della materia, nel nostro caso i matematici professionisti.

Come fare, però? Sono state elaborate varie strategie di indagine, basate su interviste, o su stimoli apparentemente innocui (associazioni verbali, costruzione di grafici, test di classificazione, ...); a seconda di come il soggetto risponde, se ne induce una certa corrispondenza e si paragona quella del principiante con quella dichiarata o presunta dello scienziato.

Questo tipo di analisi ha mostrato che, con il passare del tempo, le reti semantiche degli studenti, in un particolare settore di studio, tendono a diventare sempre più simili a quelle sottese nei libri di testo o proposte anche solo implicitamente dall'insegnante. Un celebre studio di Thro (pubblicato nel 1978) mostrò che i più brillanti risolutori di problemi di fisica, nei corsi universitari, erano quelli le cui reti semantiche mostravano strutture cognitive le più vicine a quelle dei loro stessi docenti (fisici professionisti).

Ora, se tutto ciò, almeno come modello, rende ragione di come sia strutturata la conoscenza, lascia però senza risposta il problema che ci interessa di più: come si risolve un problema?

Rispondono Resnick e Ford (1991, p. 204):

> Le teorie dell'elaborazione delle informazioni concepiscono la mente come se possedesse, oltre alle strutture conoscitive, un repertorio di strategie di problem solving, che aiutano a interpretare i problemi, a reperire le conoscenze e i procedimenti immagazzinati e a generare nuove relazioni tra voci della memoria archiviate separatamente. Queste strategie organizzano i processi del pensiero e fanno ricorso a vari componenti della conoscenza per elaborare un piano di azione in grado di portare alla risoluzione del compito che si ha di fronte.

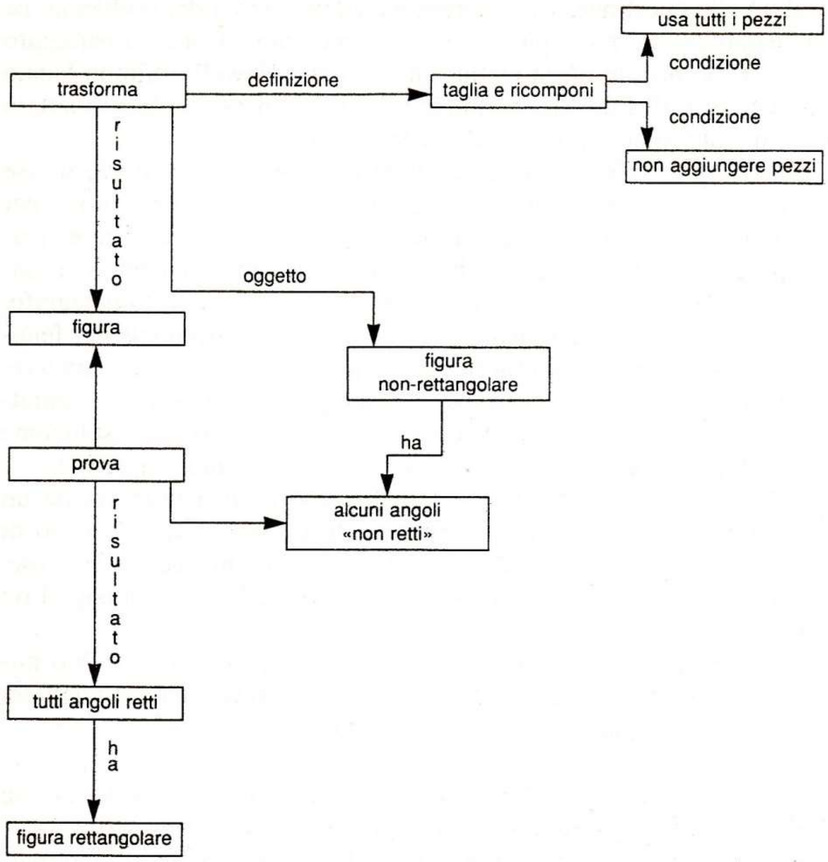
Non basta dunque la rete di conoscenza, ma va considerata, per così dire, una "riserva di strategie", immaginabile come una rete di complessità superiore che collega reti tra di loro o nodi, in modo complesso.
Sorgono, per spiegare bene il fenomeno della risoluzione dei problemi, tre aspetti della strategia della risoluzione dei problemi:
• come ci si rappresenta il problema;
• come interagiscono le caratteristiche del contesto problematico con le conoscenze di ciascun risolutore;
• come sono analizzati i problemi e come il risolutore esamina le strutture della conoscenza (soprattutto in quel caso "misterioso" in cui vengono utilizzate delle informazioni che non sono collegate con il problema proposto).
Ciascuno di questi tre aspetti apre un mondo a sé (la cui trattazione sarebbe lunghissima). Per brevità, diciamo solo che per ogni problema, semplice o complesso, sono proposte da questa scuola psicologica, tre sole modalità di rappresentazioni possibili: (1) linguistica informale, (2) fisica o visiva, (3) algebrica (più in generale: formale). Ciascuna di esse ha capacità di sfruttare tipi di conoscenze tra loro diverse che dipendono dallo stile o dalle competenze del singolo risolutore; e, di conseguenza, stimolano modalità diverse di risoluzione del problema.

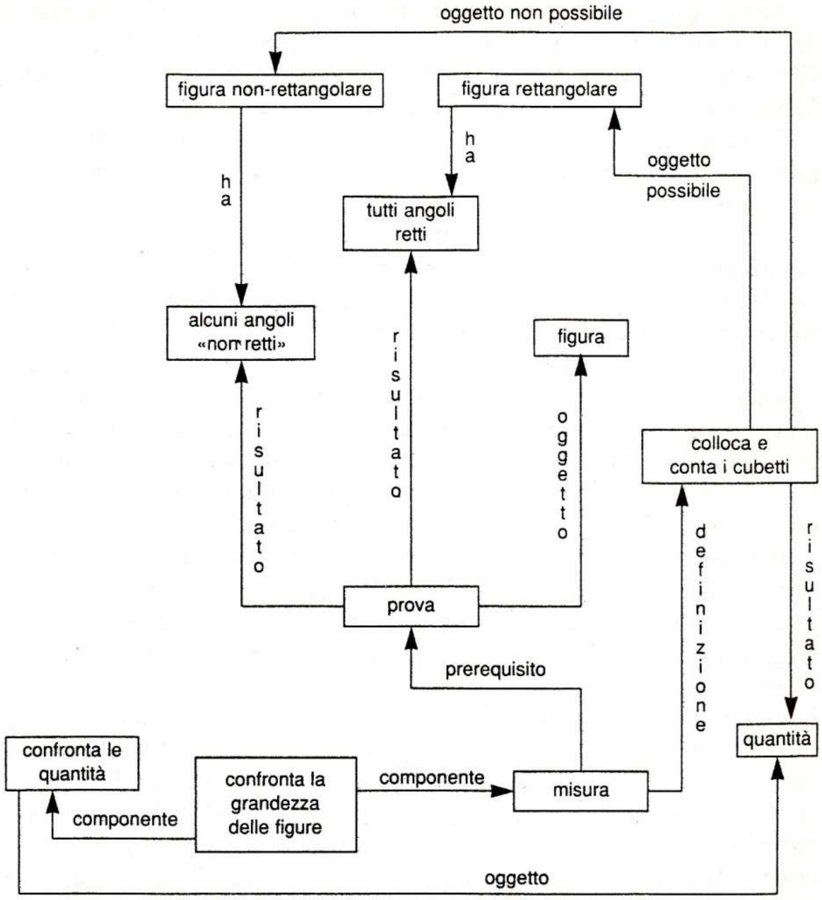
Il contesto problematico ha un'importanza eccezionale ed è stato ampiamente studiato anche per quanto riguarda la cosiddetta fissità funzionale. Spesso una piccola modifica del contesto è determinante per la scoperta di una strategia (si pensi al dondolare involontario della corda appesa, nell'esperimento di Maier, più volte ricordato; o al maestro che fa apparire improvvisamente sul banco un paio di forbici durante il problema di trovare l'area del parallelogramma; in ogni caso si tratta di aiuti contestuali esterni).
Quanto all'aspetto relativo all'analisi dei problemi, qui si torna subito alla questione della "rappresentazione interna" del problema. È proprio in quest'ambito di studi che Newell e Simon (1972) hanno concepito l'idea di "spazio interno del problema".

Il compito affascinante di studiare quali siano le strategie messe in atto per risolvere problemi e dunque, da parte del ricercatore, per esaminare le strutture della conoscenza, ha portato da un lato a creare programmi di calcolatore che simulano il comportamento dei giovani risolutori, come già accennato all'inizio di questo paragrafo, e dall'altro lato a un'analisi sempre con reti concettuali del fenomeno. Per quanto riguarda la prima questione, rinviamo ancora una volta a Resnick e Ford (1991, pp. 211-214) che presentano soprattutto il programma Perdix di Greeno, del 1978, relativo alla risoluzione di problemi di geometria da parte di studenti di scuola superiore.

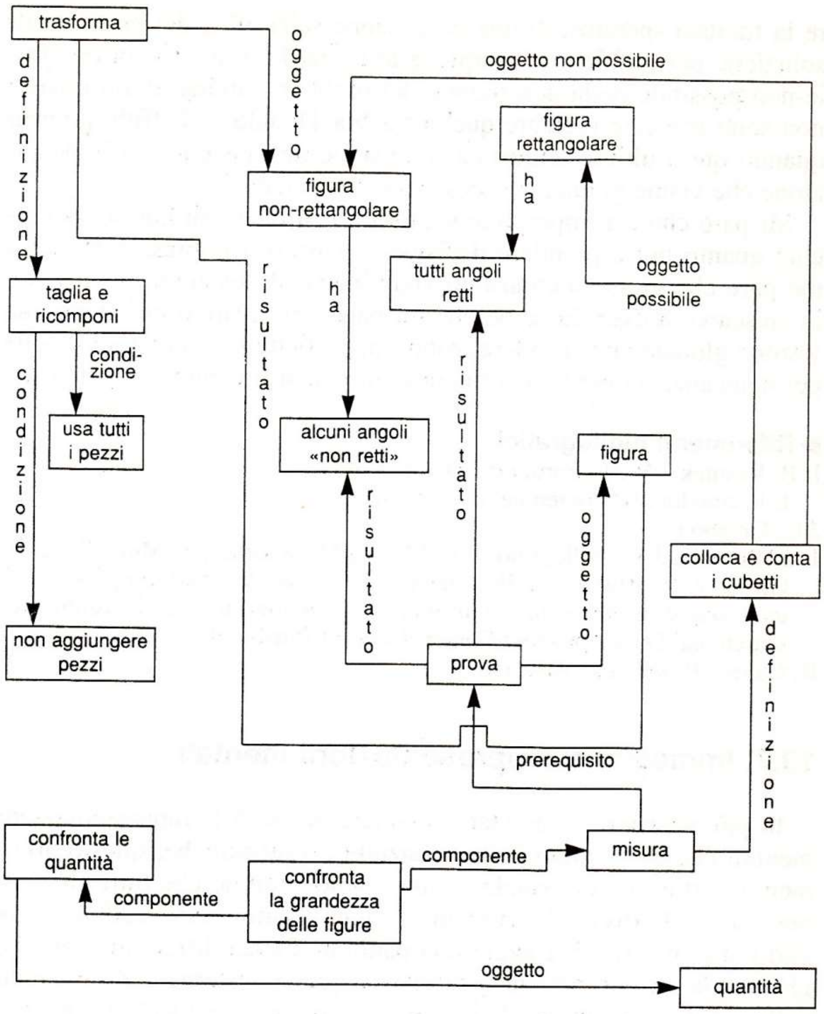
Per quanto riguarda invece l'analisi che è stata fatta sia da un punto di vista razionale, sia empirico di un particolare esercizio di geometria con bambini di 10 e 11 anni, diremo invece poche cose, qui di seguito, sempre sfruttando lo stesso testo (pp. 214-222) e le immagini ivi contenute.
Il problema preso a mo' di esempio era quello di arrivare a far *scoprire* come si può misurare l'area di un parallelogrammo da parte di bambini ai quali era stata fatta apprendere una coppia di processi:
a. misurare l'area di un rettangolo e paragonare tra loro le aree di due rettangoli attraverso il ricoprimento con cubetti;
b. tagliare un parallelogrammo in modo opportuno per "trasformarlo" in un rettangolo equiesteso (di base e altezza congruenti a quelle del rettangolo).

Ecco di seguito lo schema delle due strutture conoscitive separate, che il lettore può analizzare nei dettagli, anche per dettagli locali.





Nella figura seguente, mostriamo la struttura conoscitiva che gli autori della ricerca (Resnick, Pellegrino, Morris, Schadler, Mulholland, Glaser e Blumberg, lavoro pubblicato nel 1980; ma noi ci serviamo dell'accurata descrizione data da Resnick e Ford, 1991) suppongono che debba essere costruita per risolvere il problema.



Si vede subito come i due schemi concettuali precedenti siano parti di quest'ultima, ma come si sia creata una connessione forte assumendo che il "vertice" dello schema:

"alcuni angoli non retti"

sia diventato punto di sutura. Secondo la ricerca detta, circa il 50% dei bambini vide subito il collegamento o di colpo o facendo un po' di ricerca attiva. Gli altri 50%, invece, non "vedevano" il collegamento e dunque lo sperimentatore dava indicazioni all'inizio appena accennate, e poi sempre più esplicite, fino ad arrivare a suggerire di tagliare quei "pezzi" che disturbavano, dato che contenevano angoli non retti. Man mano che il suggerimento proseguiva, a ogni stimolo sempre più bambini "vedevano" il problema e la sua soluzione, creando quindi dalle due reti quella unica e complessa.
Per un'analisi molto particolareggiata dell'esperienza, si veda sempre il volume di Resnick e Ford (1991); così, per diverse varianti all'esperienza.
Tra queste, però, ne segnaliamo una perché è nello spirito di quel che spesso suggeriamo agli insegnanti con i quali siamo in contatto.
Lo sperimentatore presenta i due processi a) e b) detti sopra, poi chiede ai bambini: "Che cosa pensate che io desideri che voi facciate?", oppure: "Che cosa pensate che io vi stia per proporre?". Si tratta di un processo di metacognizione attiva di grande valenza

educativa, al di là della sperimentazione psicologica. Attirare l'attenzione sugli obiettivi in una situazione di problem solving facilita la possibilità di trovare la soluzione: la potremmo chiamare analisi consapevole degli obiettivi (ed è molto di più che la sempre auspicata, ma assai meno convincente: esplicitazione degli obiettivi da parte degli insegnanti; qui si tratta di una vera e propria attività).

Un'esposizione più particolareggiata delle varie posizioni delineate e descritte finora, e di quelle sacrificate al bisogno di brevità, richiederebbe molto più tempo e molti più dettagli e spiegazioni; per cui, consideriamo buon avviso quello di fermarsi.
Quanto abbiamo visto, ci sembra sufficiente per di poter affermare che l'analisi del processo di risoluzione in soli termini di descrizione esterna del comportamento non porti a chiarire la vera natura del processo di risoluzione di un problema di matematica; d'altra parte, l'evidenziazione dei passaggi interni sembra assai difficile da rilevare. Troppe e troppo complesse sono le variabili in gioco per avere la fondata speranza di una descrizione scientifica del processo di risoluzione dei problemi. Polemiche al riguardo, scientificità possibile - non possibile nella descrizione del problem solving, d'altra parte, non sono mancate (celebre quella tra MacDonald e Griffith, descritta in Resnick e Ford, 1991; proprio Griffith tentò una trattazione dell'insight con un'impostazione che venne giudicata … eccessivamente scientifica).
Ci pare che sia importante soprattutto riflettere su queste tematiche; quanto poi a prendere decisioni e partito, l'impresa è ardua: a noi pare che vi siano contributi significativi e posizioni di notevole interesse in ciascuna di esse. Ecco perché ci pare più sensato avere una visione globale che scendere troppo in particolari psicologici.

Va anche ripetuto, per sicurezza, qualora non fosse chiaro, che quanto qui esposto è principalmente legato agli aspetti meramente psicologici, di base, prima che la moderna visione della didattica della matematica si impossessasse di alcuni degli aspetti descrittivi e fenomenologici del problema. Si veda D'Amore (1999a, 1999b).

Immagini e rappresentazioni mentali

In più occasioni, sono state chiamate in causa le rappresentazioni mentali che, nel corso delle attività di risoluzione di un problema, ci si fanno delle situazioni problematiche; questo argomento, tutt'altro che banale, dato il ruolo centrale che tutti gli riconoscono nell'attività di problem solving, è stato molto studiato, e da vari punti di vista. Per avere una panoramica dei differenti ruoli che giocano la visualizzazione "interna" e quella "esterna", al momento della risoluzione dei problemi, rimandiamo a Pellerey (1984, 1990).
Questo tipo di studi può farsi iniziare da molto tempo; si pensi che addirittura Piaget e Inhelder (1951) sostenevano una distinzione tra:
• immagini riproduttive (evocano oggetti, situazioni o eventi noti);
• immagini anticipatorie (rappresentano oggetti costruiti solo mentalmente).
Piaget ed Inhelder affermavano che le immagini visive servono da punto di partenza nell'attività di concretizzazione dei pensieri evocati dai simboli verbali e dai simboli matematici; questi ultimi, per la loro natura, sono astratti ma il solutore se ne fa un'immagine concreta (e questo è punto cruciale nel problem solving): proprio le immagini visive sono la chiave di volta di questa concretizzazione. Gli studi fatti su

scienziati mostrerebbero che proprio in questa delicatissima fase si gioca la creazione scientifica, nella capacità di immaginare e di creare schemi visuali di sviluppo del pensiero. (Testimonianze significative al riguardo sono state fornite da Einstein, Hadamard e Poincaré, come abbiamo già ricordato).
Certo, c'è il problema di un ulteriore delicatissimo passaggio: dall'immagine interna alla parola. Sono stati compiuti studi su questo passaggio ed è stata rilevata una prevalenza della fase iconica, rispetto a quella verbale (Johnson-Laird, 1988). In base a vari esperimenti, sui quali non ci soffermiamo, è stato mostrato che solo dopo una fase di familiarizzazione con il problema, il risolutore passa da una fase visiva (rappresentazioni interne ed esterne) a una linguistica; ciò, afferma lo stesso Pellerey (1990), è «la controprova di quanto individuato da Haslerud e Meyer (l958) e cioè l'influsso inibitorio prodotto da un eccessivo uso della verbalizzazione nella fase della soluzione di un problema».
Un'angolazione interessante e particolare del problema è stata proposta da Bruner, vediamo come. Bisogna rifarsi a certe intuizioni di Piaget secondo il quale lo sviluppo del bambino comporta ristrutturazioni successive di fatti e di relazioni; queste hanno origine e si manifestano attraverso interazioni tra i bambini, con l'ambiente e grazie alla manipolazione che i bambini fanno appunto dell'ambiente stesso. Come si rappresentano, però, tali interazioni nella mente del bambino? A questo Bruner dedicò le sue attenzioni nei primi anni '60, arrivando a scrivere (1966a):

> Per trarre beneficio dal contatto con eventi che ricorrono regolarmente nell'ambiente, dobbiamo rappresentarceli in qualche modo. Liquidare questo problema come «pura memoria» equivale a falsarlo, poiché il fatto più importante nella memoria non è l'immagazzinare l'esperienza passata, ma piuttosto il recuperare ciò che interessa, in qualche forma utile. Ciò dipende da come l'esperienza passata è codificata ed elaborata, in modo che possa davvero essere rilevante e utilizzabile nel presente, quando occorre. Il prodotto finale di tale sistema di codificazione e di elaborazione è quella che possiamo chiamare una rappresentazione.

Si passa dunque a una vera e propria *rappresentazione cognitiva* che, nel particolare campo della risoluzione dei problemi di matematica, è stata molto studiata e ha assunto un rilievo centrale.

Torniamo a Bruner (1966a); egli distingue tre modalità di rappresentazione:
• esecutiva (enactive); ci si rappresentano eventi passati attraverso un atto motorio, dice Bruner; nel bambino, si ha una prova di ciò, studiata da Piaget, nel gesto che fa il bambino piccolo agitando il pugno con un ricordo di sonaglio che, nella realtà, è caduto a terra, gesto tipico e osservabile nei bambini; negli adulti, viene suggerito il caso dei muscoli che ricordano il movimento delle gambe del pedalare, quando, anche dopo molti anni, si risale in bicicletta; in attività di matematica, è stato studiato il battere le dita sul mento o sul banco, nei bambini che eseguono operazioni di addizione, evidente richiamo al conteggio: è probabile che all'inizio delle loro esperienze aritmetiche vi sia stato un gesto del genere;
• iconica (iconic); qui si passa dal concreto reale al mondo delle immagini mentali astratte; secondo Bruner si ha questa modalità se il bambino s'immagina, si raffigura una manipolazione o un'operazione per ricrearla quando sarà necessario: si tratta di un riassunto di eventi, che mantiene solo le caratteristiche essenziali; come esempio adulto, la persona che dà indicazioni stradali a un forestiero immagina sé stesso che fa il percorso e dà indicazioni quasi visive, ma non particolari: solo di punti, per così dire, salienti; per

i bambini che fanno matematica, a mo' di esempio viene suggerito il caso di un allievo che debba ordinare oggetti in base a una determinata proprietà e che, senza eseguire tutti i dettagli, s'immagina la situazione iconicamente;
• simbolica (symbolic); qui si richiede una competenza linguistica; un simbolo e, spesso, una parola, nulla hanno a che vedere con la cosa o la qualità designata; il nome "cinque" e il segno "5" nulla hanno a che vedere con le cinquine dei vari oggetti: si tratta di puri simboli astratti;[2] si pensi alla grande varietà di essi, in contesto matematico: elementi, relazioni, operazioni, segni funzionali, ...; quando il bambino entra a contatto con questi segni, inizia una rappresentazione simbolica; l'uso di queste rappresentazioni dà vita a una nuova possibilità di pensiero astratto.
L'ordine nel quale questi tre modi di rappresentazione sono stati elencati, non è casuale; anzi, per Bruner essi si sviluppano proprio in quest'ordine e ciascuno di essi è la base cognitiva per il successivo: essi sono collegati in modo evolutivo. Sembra uno sviluppo dell'intelligenza a stadi, simile alla teoria di Piaget. Ma ben diversa è un'applicazione scolastica delle due teorie. Piaget sembra dire che occorre aspettare a svolgere certi concetti, finché il bambino non è pronto. Bruner, all'opposto, afferma: "Qualunque idea o problema o conoscenza può essere presentato in forma abbastanza semplice, in modo che ogni singolo allievo possa capirlo in una forma riconoscibile". È ben noto che Bruner si lanciò in … avventure discutibili di insegnamento della matematica, come quando provò a insegnare a bambini di scuola la risoluzione di equazioni quadratiche e le proprietà dei gruppi. L'idea-base è quella di presentare i concetti in modalità corrispondenti ai tre modi di rappresentazione; potrebbe succedere che un certo individuo, per un certo concetto, sia già "pronto" alla fase simbolica: ciò nonostante, Bruner consiglia ugualmente la presentazione del concetto nei tre modi, nell'ordine detto, allo scopo soprattutto di "fondare" le immagini mentali a cui fare riferimento e porle dunque alla base delle acquisizioni cognitive. Un celebre esempio dello stesso Bruner è quello della bilancia a due bracci, rappresentato in modo esecutivo con due bambini in altalena, in modo iconico con un'asta disegnata a pioli e pesi solo disegnati, in modo simbolico con l'espressione della legge di equilibrio della leva.
Stessi esempi possono essere proposti per quanto riguarda la notazione posizionale nel sistema decimale, per gli algoritmi delle operazioni e altro.
Lo studio di Bruner lascia molti interrogativi aperti:
• i tre modi esauriscono le possibilità?;
• quale dei tre, se c'è, è da prediligere in attività didattiche?; tale scelta dipende dall'età?;
• in che senso il modo simbolico è più "avanzato" di quello iconico?;
• come avvengono le transizioni da un modo all'altro?;
• come sfruttare ciò in didattica?; ci sono propensioni personali, o si tratta proprio solo di evoluzione?;
• tutto ciò, ha davvero una qualche utilità in didattica, specie poi in didattica della matematica?
Molte di queste domande hanno trovato risposte; ma, a seconda delle scelte teoriche di fondo, talvolta hanno trovato risposte tra loro diverse: questa è la bellezza, ma anche il limite, di tutta la faccenda.

---

[2] Si può far notare che, quanto qui affermato vale per la cifra di derivazione indiana 5: la sua forma nulla ha a che vedere con una quantità di oggetti di cardinalità cinque; mentre, nell'aritmetica latina, il simbolo che indica quel cinque, cioè V, sì, ha a che fare con le cinque dita della mano. È opinione molto diffusa e condivisa che la cifra latina V stia a ricordare una mano aperta e sollevata, indicante quindi le cinque dita prese in colpo solo.

Studi sull'elaborazione mentale e sulla rappresentazione della situazione problematica (aiutata o complicata da grafici ecc.), sono stati fatti da Newell e Simon (1972); gli elementi oggettivi di qualsiasi problema sono elaborati e poi trasformati in un processo di codificazione, elaborati mentalmente e dunque immaginati, rappresentati. Si ha così una rappresentazione del problema alla quale i due autori hanno dato il nome di "spazio interno del problema": si tratta cioè di un contesto più ampio, più ricco, più comprensivo di quello esterno, dato che in esso si raccolgono non solo i dati oggettivi, ma anche tutta una complicata rete di fatti, relazioni, procedimenti, … che tali dati richiamano nella memoria permanente, talvolta in modo confuso, ma produttivo. Studi successivi, di vari autori, hanno cercato di fare chiarezza sul modo di… dipanare la matassa, il groviglio, da parte dei giovani risolutori di problemi; per esempio, anche le ricerche di Greeno (1978) sulla risoluzione dei problemi di geometria da parte dei ragazzi delle scuole superiori si possano inserire in questo filone di studi. Ma non entriamo in dettagli, rinviando alla bibliografia.

Alle pp. 110 e seguenti di Bruner J. S. (1966a) [in italiano 1969, XIV ristampa 1991), l'autore racconta di esperienze di insegnamento della matematica, molto formale, a bambini di nove anni; in particolare l'autore e i suoi collaboratori tentavano di presentare quella che loro chiamano la proprietà distributiva: "che cioè le espressioni a+(b+c) e (a+b)+c potevano essere considerate equivalenti". Così narra: "Uno tra i più intelligenti dei nostri allievi, all'inizio di una lezione, commentò tale nostro tentativo con l'esclamazione: "Oh, stanno distribuendo di nuovo la proprietà distributiva"». Osserviamo con dettaglio; ammesso che l'autore intendesse scrivere o sottintendere l'uguaglianza: a+(b+c)=(a+b)+c questa non è affatto una proprietà distributiva (per la quale, di solito, si richiede la presenza di due operazioni appunto perché l'una è distributiva rispetto all'altra) ... Che dire? Sforzi, tempi, danaro pubblico spesi invano? Ci limiteremo a considerare sempre più necessario che i matematici siano presenti in attività di ricerca che riguardano la matematica, altrimenti è un pasticcio!
Nello stesso libro (p. 25), d'altra parte, l'autore afferma varie altre cose … matematiche piuttosto bizzarre; ma anche che:

> Il Piaget ha saputo cogliere la teoria logica implicita in base alla quale opera il bambino quando affronta compiti di natura intellettiva. Nelle sue descrizioni di carattere formale ci sono indubbiamente dei difetti, che sono stati criticati da logici e matematici, ma ciò non ha importanza: straordinariamente importante è invece l'utilità, il valore del suo lavoro descrittivo, anche se questa descrizione formale non costituisce assolutamente una spiegazione né una descrizione psicologica dei processi dello sviluppo.

Crediamo che ci sia molto di vero in tutto ciò; e che sia necessario un lavoro comune fra matematici e psicologi sempre più profondo.

Altri filoni di studio a carattere psicologico

Fra i tanti studiosi, soprattutto psicologi, che hanno lavorato nella direzione di fornire come modello comportamentale per la risoluzione di un problema da parte di un essere umano, anche di uno studente a scuola, soprattutto su temi matematici, una sequenza più o meno algoritmica, alcuni sono nomi di grande rilievo; ciò che li accomuna, pur nelle

molte differenze, è stato il tentativo di trasformare per davvero le varie e complesse fasi che costituiscono tale risoluzione in una sequenza che ritenevano vincente.
Non citiamo in modo approfondito questi studi, il che ci porterebbe lontano e occuperebbe troppo spazio. Ricordiamo solo i principali: Ausubel (1968), Forehand (1976), Gagné (1962, 1973, 1976), Gagné e Briggs (1974), Gagné e Brown (1961), Gagné, Mayor, Garstens e Paradise (1962), Gagné e Paradise (1961), Kleinmuntz (1976). Altri studi di psicologi, invece, condannavano questo modo di proporre il … problema a dei problemi, per esempio Resnick e Ford (1991).
Per saperne assai di più, in dettaglio, si veda D'Amore (2014).
Suggeriamo altri studi di grande interesse relativi alla risoluzione dei problemi in matematica: D'Amore e Zan (1996a, 1996b), Zan (1992, 1996a, 1996b, 1997, 1998, 2000, 2002, 2007, 2008, 2009, 2011, 2012a, 2012b), Zan e Poli (1999), Bonotto e Baroni (2011).
Come testo concreto, che fornisce moltissimi esempi tratti dalla pratica scolare, suggeriamo D'Amore e Marazzani (2011).

Per saperne assai di più, in dettaglio, si vedano: D'Amore (2014) e D'Amore e Fandiño Pinilla (2016).

Testi citati

Anderson, J. R. (*1976*). *Language, memory*, *and thought*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Anderson, J. R.*,* & Bower, G H. *(*1973*). Human Associative Memory*. Washington: Wmslon.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Bara, B. (1990). *Scienza cognitiva*. Torino: Bollati Boringhieri.

Bonotto, C., & Baroni, M. (2011). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? I Parte. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *34A*(1), 9-40.

Bruner, J. S. (1966a). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, Ma: Harvard University Press. [Trad. it. 1982, Roma: A. Armando].

Burton, L., Mason, J., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Craik, F. I. M., & Lockhart, R. S. (1972). Level of processing: A framework for memory research. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, *11*, 671-685.

D'Amore, B. (1999a). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Il libro è stato recensito su *ZDM* (2001), *33*(4), 103-108 (H. Maier)]. Sono state stampate due edizioni ampliate, in spagnolo (2006) e in portoghese (2007).

D'Amore, B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *22a*(3), 247-276.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Proposte metodologiche illusorie nel processo di insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*. 73, 15-42.
D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. IV vol. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.
D’Amore, B., & Zan, R. (1996a). Mathematical Problem Solving. In N. Malara, M. Menghini & M. Reggiani (Eds.), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*. Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica. Pp. 136-150. Roma: CNR. [Questo testo è stato stampato anche in: A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.) (1996), *Didactics and History of Mathematics*. Pp. 35-52. Thessaloniki: Erasmus ICP 95 G 2011/11].
D’Amore, B., & Zan, R. (1996b). Contributi italiani sul tema “Problemi” (1988-1995). *La matematica e la sua didattica*, *10*(3), 300-321.
Davis, R. B. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: A summary analysis. In J. Hierbert (Ed.) (1986), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
De Carolis, V. & Pellerey, M. (1987). Comportamenti algoritmici inadeguati nell’esecuzione di sottrazioni aritmetiche: un’analisi psicologica. *Orientamenti Pedagogici*, 4, 643-666.
Duncker, K. (1945). On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58, 1-112.
Forehand, G. A. (1976). Formulazioni e strategie per la ricerca sulla risoluzione dei problemi. In B. Kleinmuntz (Ed.) (1976), *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. Roma: A. Armando.
Gagné, R. M. (1962). The acquisition of knowledge. *Psychological Review*, 69, 355-365.
Gagné, R. M. (1973). *Le condizioni dell’apprendimento*. Roma: A. Armando. [Ediz. orig. 1965, New York: Holt, Rinehart & Winston].
Gagné, R. M. (1976). Problem solving negli uomini: eventi interni ed esterni. In B. Kleinmuntz (Ed.), *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. Pp. 133-150. Roma: A. Armando.
Gagné, R. M., & Briggs, L. J. (1974). *Principles of instructional design*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
Gagné, R. M., & Brown, L. T. (1961). Some factors in the programming of conceptual learning. *Journal of Experimental Psychology*, 62, 313-321.
Gagné, R. M., Mayor, J. R., Garstens, H. L., & Paradise, N. E. (1962). Factors in acquiring knowledge of a mathematical task. *Psychological Monographs: GeneraI and Applied*, 7, 76.
Gagné, R. M., & Paradise, N. E. (1961). Abilities and learning sets in knowledge acquisition. *Psychological Monographs: General and Applied*, 75, 14, 1-23.
Glaeser, G. (1975). *La matematica moderna per chi deve insegnare*. Milano: Feltrinelli.
Glaeser, G. (1976). Heuristique générale: estimation de la difficulté d’un problème. In AA.VV., *La Problématique et l’Enseignement de la Mathématique*. Pp. 33-47. Louvain-Ia-Neuve: Ciaem.
Glaeser, G. (1982). Aspects Gestaltistes de la Résolution des Problèmes. In G. Noel G. (Ed.), *Colloque International sur l’Enseignement de la Géometrie*. Pp. 241-254. Mons: Ciaem.
Glaeser, G. (1984). À propose des obstacles épistemologiques: réponse à Guy Brousseau. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 5(2), 229-234.
Greeno, J. G. (1978). A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*. Vol. 1. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Pp. 1-27. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N. (1988). *Modelli mentali*. Bologna: Il Mulino. [Ed. or. 1983, Cambridge: Lawrence Erlbaum Associates. Inc.].

Katona, G. (1967). *Organizing and memorizing: Studies in the psychology of learning and teaching*. New York: Hafner. [Ed. or. 1940, New York: Columbia Univ. Press].

Kleinmuntz, B. (Ed.) (1976), *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. Roma: A. Armando.

Kohler, W. (1929). *Gestalt psychology*. New York: Liveright.

Kreutzer, M. A., Leonard, D., Sister, C., & Flavell, J. H. (1975). An interview study of children's knowledge about memory. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 40, 1-165.

Luchins, A. S., & Luchins, E. H. (1970). Wertheimer's seminars revisited: Problem solving and thinking. II vol. Albany, N.Y.: Faculty-Student Ass., State Univ of New York.

Murray, F. B. (1972). Acquisition oJ conservation through social interaction. *Developmental Psychology*, 6, 1-6.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood, N. J.: Prentice-Hall.

Pellerey, M. (1984). Procedimenti matematici e immagini mentali. *Orientamenti Pedagogici*, 3, 444-465.

Pellerey, N. (1990). Controllo e autocontrollo nell'apprendimento scolastico: il gioco tra regolazione interna ed esterna. *Orientamenti Pedagogici*, 3, 473-491.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La* representation de l'espace *chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaire de France.

Polanyi, M. (1979). La conoscenza inespressa. Roma: A. Armando. [Ed. or. 1966, Londra: Routledge & Kegan Paul].

Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matemati*ca. *Logica e euristica nel metodo matematico.* Milano: Feltrinelli. [Ed. orig. 1945, Princeton: Princeton University Press].

Polya, G. (1970). *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risoovere i problemi.* Vol. II. Milano: Feltrinelli. [Ed. orig. 1967, New York: Wiley].

Polya, G. (1971). *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risoovere i pronlemi.* Vol. I. Milano: Feltrinelli. [Ed. orig. 1962. New York: Wiley].

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1991). *Psicologia della matematica ed apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. orig. 1981, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates].

Searle, J. R. (1988). *L'intenzionalità*. Milano: Bompiani. [Ed. or. 1983, Cambridge, Cambridge University press].

Skinner, B. F. (1968). *The Technology of Teaching*. New York: Appleton-Century-Crofts.

Speranza, F. (1989). Riflessione sui criteri per valutare le trattazioni di una teoria matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, *4*(15), 117-128.

Speranza F. (1990). Controindicazioni al riduzionismo. *La matematica e la sua didattica*, *4*(3), 12-17.

Speranza, F. (1991). Confronto fra concezioni epistemologiche a proposito della geometria. In L. Magnani (Ed.), *Conoscenza e matematica*. Milano: Marcos y Marcos.

Thro, M. P. (1978). Relationships between Associative Patterns and Content of Physics Concepts. *Journal of Educational* Psychology, 70, 971978.
Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York: Harper & Row. [Si tratta dell'edizione ampliata della prima del 1945; in italiano, Firenze: Giunti-Barbera].
Zan, R. (1992). Il ruolo del contesto e della domanda nel problema espresso in forma verbale. *La matematica e la sua didattica*, *6*(2), 36-44.
Zan, R. (1995). Chi non riesce in matematica? In B. D'Amore (Ed.), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*. Atti del IX Convegno Nazionale Incontri con la Matematica, Castel San Pietro Terme, novembre 1995. Pp. 77-83. Bologna: Pitagora.
Zan, R. (1996a). Difficoltà d'apprendimento e problem solving: proposte per un'attività di recupero. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19B*(4), 311-350.
Zan, R. (1996b). Bravi e cattivi solutori a confronto nella scelta di problemi impossibili. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(2), 409-423.
Zan, R. (1997). Problemi e decisioni. In I. Aschieri, M. Pertichino, P. Sandri, & P. Vighi (Eds.), *Problemi e alunni con problemi*. Atti del Convegno Nazionale del Grimed Matematica e difficoltà n. 6, Castel San Pietro Terme, febbraio 1997. Pp. 101-106. Bologna: Pitagora.
Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora
Zan, R. (2000). L'insegnante come solutore di problemi. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 48-71.
Zan, R. (2002). I comportamenti dei bambini di fronte al problema scolastico standard: alcune riflessioni. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 278-305.
Zan, R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *30 AB*(2), 741-762.
Zan, R. (2008). Ricerca e RMT insieme per definire che cos'è un "buon problema". In AA. VV., *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica / RMT entre pratique et recherche en didactique des mathematiques*. 19-21 ottobre 2007. Pp. 19-30. Bard (Valle d'Aosta): In proprio.
Zan, R. (2009). Perdersi in un bosco narrativo. Ovvero: Quando il contesto ostacola la comprensione di un problema. In AA. VV., *Le competenze matematiche per l'identità, l'autonomia, la cittadinanza*. Atti del Convegno Nazionale Matematica & Difficoltà. 16. Pp. 193-198. Bologna: Pitagora.
Zan, R. (2011). The crucial role of narrative thought in understanding story problems. In AA. VV., *Current State Of Research On Mathematical Beliefs XVI*. Proceedings of MAVI 16 Conference. Tallinn, 26-29 June 2010. Pp. 287-305.
Zan, R. (2012a). Comprendere un problema: un bel problema! In S. Sbaragli (Ed.), *La didattica della matematica: insegnamento e apprendimento a confronto*. Castel San Pietro Terme (BO), 26-27-28 ottobre 2012. Bologna: Pitagora.
Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35A*(2), 437-468.
Zan, R., & Poli, P. (1999). Winning beliefs in mathematical problem solving. In: AA. VV.,First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. August 27th - 31st, 1998. Pp. 97-106.

Altri riferimenti bibliografici

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2008). Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione. *La matematica e la sua didattica*, *22*(4), 479-520.

AA. VV. (1974). A scuola con il corpo. *Quaderni di cooperazione educativa*, 8. Fascicolo speciale.

AA. VV. (1977). *Informatica*. Milano: F. Angeli.

AA. VV. (1978). *Psicologia del rapporto educativo*. Milano: Isedi.

AA. VV. (1983). *Concetti e conoscenze*. Torino: Loescher. [In particolare, i capitoli di P. Boscolo, di M.S. Veggetti e di C. Pontecorvo].

AA. VV. (1985). *L'emotività a scuola*. Milano: F. Angeli.

AA. VV. (1991). *Testi delle relazioni*. VI Incontro Internuclei sulla scuola elementare. Garda (Vr) 11 - 13 aprile 1991. Pubblicazione interna degli Incontri Internuclei.

AA. VV. (2002). Appendice alla *Enciclopedia Pedagogica*. Diretta da Mauro Laeng. Brescia: La Scuola Editrice.

Abraham, A. (1984). *L'enseignant est une personne*. Paris: ESF.

Ackermann-Valladao, E. et al. (1983). Formation et actualisation des modèles du sujet en situation de resolution de problème. *Archives de Psychologie*, 51, 62-70.

Aebli, H. (1961). *I principi fondamentali dell'insegnamento*. Firenze: Giunti-Barbèra. (Ed. or. 1961). [Nuova edizione 1985].

Aglì, F., & Martini, A. (1991). In una conca nuotano a rilento 3 trote, 5 triglie e tinche 100 - Strategie ingenue di rappresentazione delle quantità, delle variazioni di quantità e di scrittura dei numeri in età prescolare. Comunicazione orale al XX GIRP, Locarno, 18-24 agosto 1991: *L'universe numérique*. Pubblicazione interna.

Aglì, F., & Martini, A. (1995). Rappresentazione e notazione della quantità in età prescolare. *Età evolutiva*, 51, 30-43.

Aiken, L. R. Jr. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research*, 40, 551-596.

Aiken, L. R. Jr. (1976). Update on attitudes and other affective variables in learning mathematics. *Review of Educational Research*, 46, 293-311.

Amidon, C., & Hunter, E. (1983). *L'interazione verbale nella scuola*. Milano: F. Angeli.

Anderman, E. M., & Maehr, M. L. (1994). Motivation and schooling in the middle grades. *Review of Educational Research*, 64, 287-309.

Antiseri, D. (1985). *Teoria e pratica della ricerca nella scuola di base*. Brescia: La Scuola.

Argyle, M. (1974). *Il comportamento sociale*. Bologna: Il Mulino.

Arzarello, F. (1983). *Matematica e linguistica*. Milano: F. Angeli.

Aspy, D., & Roebuck, F. (1977). *Kids don't learn from people they don't like*. Ameherst, Mass.: HRDP Human Resource Development Press.

Azrin, N. H. *(*1958*).* Some effects of noise on human *behavior*. *Journal of the Experimental Analysis of* Behavior, 1, 183-200.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (1992). Le classificazioni dei quadrilateri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *15*(8), 785-814.

Bagni, G. T., D'Amore, B., Giovannoni. L., & Picotti, M. (1993). *Esercizi di autoverifica per insegnanti*. Progetto Ma.S.E., vol. VIII. Milano: F. Angeli.

Baldassarri, E. et al. (1987). Analisi sulle applicazioni dei modelli «intuitivi» nella divisione e nella moltiplicazione secondo le indicazioni date dal prof. E. Fischbein dell'Università di Tel Aviv e già sperimentate a Pisa da un gruppo di ricercatori e

di insegnanti. In B. D'Amore (Ed.) (1987), *Corso di matematica per gli insegnanti della scuola dell'obbligo*. Pp. 31-47. Roma: A. Armando.
Baldisserri, B., D'Amore, B., Fascinelli, E., Fiori, M., Gastaldelli, B., & Golinelli. P. (1993). I palloncini di Greta. *Infanzia*. 1, 31-34. [Questo articolo è stato ristampato su: *La matematica e la sua didattica*, *7*(4), 444-449. [Ristampato in A. Gagatsis (Ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Pp. 239-246 (in greco), pp. 571-578 (in francese). Thessaloniki: Erasmus ICP93 G2011/II. È stato inoltre ristampato su: *Cahiers de didactique des mathématiques*, 1995, 16-17; pp. 1-20 (in greco), pp. 93-102 (in francese)].
Ballanti, G. (1968). *Modelli di apprendimento e schemi di insegnamento*, Teramo: Giunti e Lisciani.
Ballanti, G. *(*1975*). Il comportamento insegnante*. Roma: A. Armando.
Ballanti, G. *(*1979*). Analisi e modificazione del comportamento insegnante*. Teramo: Lisciani.
Ballanti, G. (1984). La ricerca pedagogica sull'interazione verbale nella classe scolastica. In E. Becchi & B. Maragliano (Eds.), *Manuale critico della sperimentazione e della ricerca educativa*. Milano: F. Angeli.
Ballanti, G. (1991, II ed.). *Modelli di apprendimento e schemi di insegnamento*. Teramo: Giunti & Lisciani.
Barth, B. M. (1990). *L'apprendimento dell'astrazione*. Brescia: La Scuola. (Ed. orig. Paris 1967).
Bartolini Bussi, M. G. (1985). La rappresentazione nell'apprendimento della matematica. *Bambini*, *5*(5), 63-68.
Bartolini Bussi, M. G. (1989a). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *12*(1), 5-49.
Bartolini Bussi, M. G. (1989b). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *12*(5), 615-654.
Bartolini Bussi, M. G. (1991). Apprendere la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *14*(1), 243-258.
Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Paris: Seuil.
Bateson, G. (1976). *Verso un'ecologia della mente*. Milano: Adelphi. (Ed. orig. New York 1972).
Bereiter, C., & Englemann, S. (1966). *Teaching disadvantaged children in the preschool*. Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc.
Binet, A. (1890). Perception d'enfants. *Revue Philosophique*, 30, 582-611.
Bloom, B. S. (1979). *Caractéristiques individuelles et apprentssages scolaires*. Paris: Weathon.
Boas, R. P. (1990). George Pólya, December 13, 1887 – September 7, 1985. National Academy of Sciences (Eds.), *Biographical Memoirs: Volume 59* (pp. 338–355). Washington, DC: National Academy of Sciences.
Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *9*(9), 48-93.
Boero, P. (1989). *Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare*. Atti del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica numero 6, maggio 1989.

Boero, P. (1990). *I problemi*. In AA. VV. (1990). *Guida alle videocassette. Matematica*. Genova: Irrsae Liguria.
Boero, P., & Ferrari, P. L. (1988). Rassegna di alcune ricerche sul «problema dei problemi»: loro importanza per l'insegnamento. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *11*(7/8), 659-684.
Borasi, R. (1984). Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *7*(2), 83-98.
Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(1), 125-141.
Boscolo, P. (1983). Linee della ricerca psicologica sui concetti. In L. Handjaras et al. (Eds.), *Concetti e conoscenza*. Pp. 123-196. Torino: Loescher.
Boscolo, P. (1986). *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Gli aspetti cognitivi*. Torino: Utet.
Bourne, L. E. (1966). *Human conceptual behavior*. Boston: Allyn & Bacon.
Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.
Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Prefazione di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.
Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora.
Brousseau, G., & D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica. De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41-54. DOI: 10.24844/EM3003.02.
Brown, S. I., & Walter, M. I. (1988). *L'arte del problem posing*. Torino: SEI. (Ediz. orig. Hilldate 1983).
Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, Ma: Harvard University Press. [Trad. it. 1966, Roma: A. Armando].
Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*. 31, 21-32. [Trad. it. in: Bruner J. (1969). *Il conoscere. Saggi per la mano sinistra*. Roma: Armando].
Bruner, J. S. (1962). *On Knowing. Essays for the Left Hand*. Cambridge, Ma: Harvard University Press. [Trad. it. 1968, Roma: A. Armando].
Bruner, J. S. (1964a). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15.
Bruner, J. S. (1964b). Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics. In AA.VV., *The Sixty-third Yearbook of the National Society for the Study of Education*. 63, 306-335.
Bruner, J. S. (1966b). *Studies in Cognitive Growth*. New York: John Wiley & Sons. [Trad. it. 1968, Roma: A. Armando].
Bruner, J. S., Goodnow, J. J., & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley. [Trad. it. 1969, Roma: A. Armando].
Buswell, G. T. (1927). *Summary of arithmetic investigations*. Chicago: Univ. of Chicago Press.
Buswell, G. T. (1930). A critical survey of previous research in arithmetic. In G. M. Whipple (Ed.), *The twenty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education: Report of the Society's committee on arithmetic*. Bloomington, Ill.: Publishing of Public School.

Caldelli, M. L., & D'Amore, B. (1986). *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Firenze: La Nuova Italia.
Caldelli, M. L., D'Amore, B., & Giovannoni. L. (1984). *Il bambino matematizza il mondo*. Firenze: La Nuova Italia.
Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A.M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *25*(3), 255-270.
Carifio, J (2015). Updating, Modernizing, and Testing Polya's Theory of [Mathematical] Problem Solving in Terms of Current Cognitive, Affective, and Information Processing Theories of Learning, Emotions, and Complex Performances. *Journal of Education and Human Development*, *4*(3), 105-117.
Caroni, V., & Iori, V. (1989). *Asimmetria nel rapporto educativo*. Roma: A. Armando.
Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982), The development of addition and subtraction problem solving skills. In T.P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.) (1982), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Pp. 9-24. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Carpenter, T. P., Moser. J. M., & Romberg, T. A. (Eds.) (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Carroll, J. B. (1973). Discussants comments. In L. B. Resnick (Ed.), *Hierarchies in children's learning. A symposium*. Numero speciale della rivista: *lnstructional Science*. 2, 311-362.
Caruso, J. L., & Resnick, L. B. (1972). Task structure and transfer in children's learning of double classification skills. *Child Development*, 43, 1297-1308.
Cassani, A., Deleonardi, C., D'Amore, B., & Girotti, G. (1996). Problemi di routine e situazioni "insolite". Il "caso" del volume della piramide. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19B*(3), 249-260. [In lingua inglese: A. Gagatsis & L. Rogers (Eds) (1996), *Didactics and History of Mathematics*. Pp. 73-82. Thessaloniki: Erasmus ICP 95 G 2011/11. In lingua spagnola: 1999, *Números*, 38, 21-31].
Catarsi, E. (1990). *Storia dei programmi della scuola elementare (1860-1985)*. Firenze: La Nuova Italia.
Cesa-Bianchi, M., Beretta, A., & Luccio, R. (1970). *La percezione: un'introduzione alla psicologia della visione*. Milano: F. Angeli.
Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Cives, G. (Ed.) (1990). *La scuola italiana dall'Unità ai giorni nostri*. Firenze: La Nuova Italia.
Clemens, K. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 1-21.
Cobb, P. (1985). Two children's anticipation, beliefs and motivations. *Educational Studies in Mathematics*, *16(*2*),* 111-126.
Cofman, J. (1990). *What to solve?* Oxford: Oxford Univ Press.
Cornoldi, C. (Ed.) (1991. La conoscenza metacognitiva. *Età evolutiva*, 40, 57-119.
Cornoldi, C., & Caponi, B. (1997). Componenti emotivo-motivazionali della metacognizione e apprendimento della memoria. In I. Aschieri, M. Pertichino, P. Sandri, & P. Vighi (Eds.), *Problemi e alunni con problemi*. Atti del Convegno Nazionale del Grimed Matematica e difficoltà, n. 6, Castel San Pietro Terme, febbraio 1997. Pp. 11-15. Bologna: Pitagora.

Cronbach, L. J. (1966). The logic of experiments on discovery. In L. Shulman & E. R. Keislar (Eds.). *Learning by discovery: A critical appraisal*. Chicago: Rand McNally.

Cronbach, L., & Snow, R. E. (1977). *Aptitudes and instructional methods: A handbook for research on interactions*. New York: Irvington.

D'Amore, B. (1981). *Educazione matematica e sviluppo mentale*. Roma: A. Armando.

D'Amore, B. (1984). I nuovi programmi di matematica per la scuola elementare: alcune riflessioni. *Avio*, 1-2.

D'Amore, B. (1986a). *Un'ipotesi di curriculum matematico nella scuola elementare secondo i nuovi programmi*. Progetto Ma.S.E., vol. I. Milano: F. Angeli.

D'Amore, B. (1986b). I nuovi programmi per la scuola elementare. In F. Frabboni (Ed.) (1986), *Ipotesi-Guida didattica per la scuola elementare*. Pp. 289-312. EIT: Piana degli Albanesi.

D'Amore, B. (1986c). I nuovi programmi ministeriali di matematica per la scuola primaria. I risultati di un'attenta lettura, proiettata verso un'ipotesi di concreta applicazione. In AA.VV., *I programmi della scuola elementare*. Pp. 77-104. Roma: A. Armando.

D'Amore B. (Ed.) (1986-1993). *Progetto MA.S.E. Matematica Scuola Elementare*. Milano: Angeli. [l. B. D'Amore: *Un'ipotesi di curriculum matematico nella scuola elementare secondo i nuovi programmi*. 2. L. Giovannoni: *Lingua e logica*. 3. B. D'Amore: *Probabilità e statistica*. 4. M. L. Caldelli: *Cenni di storia e filosofia della matematica*. 5. B. D'Amore: *Geometria*. 6. B. D'Amore: *Aritmetica e algebra*. 7. M.L. Caldelli, B. D'Amore, L. Giovannoni, C. Massa, P. Oliva, M.T. Rambaldi, T. Vandelli: *Informatica*. 8. G. T. Bagni, B. D'Amore, L. Giovannoni, M. Picotti: *Esercizi di autoverifica per insegnanti*. 9. B. D'Amore, C. Fiorini, M. Minarelli, P. Sandri: *Syllabus Ma.S.E. per il I e il II ciclo*. 10A B. D'Amore: *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. 10B A. Martelli, G. Montanari, P. Pasotti, M. T. Rambaldi, P. Sandri: *Problemi nella pratica didattica*].

D'Amore, B. (1987a). *Aritmetica e algebra*. Progetto Ma.S.E, vol. VI. Milano: F. Angeli.

D'Amore, B. (1987b). *Una mostra di Matematica*. Teramo: Lisciani & Giunti.

D'Amore, B. (1988a). Il laboratorio di matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'educazione matematica*, *3*(9), 41-51.

D'Amore. B. (1988b). La didattica della matematica con l'ausilio dei mezzi informatici nella scuola dell'obbligo. *Compuscuola*, 29, 43-49.

D'Amore, B. (1988c). Problemi dell'apprendimento: alcune riflessioni in libertà. *Conoscere l'handicap*, 2, 77-86.

D'Amore. B. (1989). Osservazioni e note sull'educazione in Matematica. *La Scuola Se*, 56, 24-27. (Conferenza al I Convegno europeo di «Eurotalent» sui ragazzi superdotati, Barcellona, agosto 1989).

D'Amore, B. (1990-91). Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*, 42-43 (I parte); II parte: Numeri e teoremi in camice bianco, idem, 1-2, 1991, 51-53; III parte: Fare per saper pensare, idem, 5, 1991, 37-40; IV parte: Filosofia e linguaggi del laboratorio, idem, 9, 1991, 36-38.

D'Amore, B. (Ed.) (1990-1995). Collana: *Matematica: cultura e didattica*. Milano: Angeli. [Elenco dei volumi pubblicati: 1. D'Amore B. (1992). *Giochi logici linguistici e matematici*. Milano: Angeli. 2. Arrigo G., D'Amore B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli ed., Milano. 3. D'Amore B., Speranza F. (Eds) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli. 4

D’Amore B., Oliva P. (1994). *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*. Milano: Angeli. 5. Bagni G. T., D’Amore B. (1994). *Alle radici storiche della prospettiva*. Milano: Angeli].
D’Amore, B. (1991a). In merito all’articolo di Victor Serebriakoff sui ragazzi superdotati. *Humus*, 31, 37-38.
D’Amore, B. (1991b). Strategie ingenue nella risoluzione di problemi come mezzo per la costruzione di concetti, comunicazione orale con riassunto dattiloscritto. Atti del VI Incontro Internuclei della scuola elementare, Garda (Vr), 11-13 aprile 1991. (Ivi abbiamo denominato il tempo del complesso «preparazione + incubazione + fase confusa compresa tra le due» con il termine «tempo di entrata in problema»).
D’Amore, B. (1991c). Ricerca-azione, possibile paradigma della ricerca in didattica. *La Scuola Se*, 79-80, 14-17.
D’Amore, B. (1992a). Una breve panoramica su alcune ricerche in corso. *L’Educatore*, 4, 62-67. [Ripubblicato 1992, su: *Cahiers de didactique des mathématiques*. Tessaloniki, Grecia. 12, 7-23 (in lingua greca), 93-106 (in lingua francese)].
D’Amore, B. (1992b). Stili di apprendimento differenziati per l’educazione matematica. *La Scuola Se*, 82, 19-22.
D’Amore, B. (1992c). L’insegnamento della matematica offende le intelligenze? In B. D’Amore & T. Pellegrino (Eds.), *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*. Bologna: Pitagora.
D’Amore, B. (1993a). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-17.
D’Amore. B. (1993b). Introduzione al volume: Martelli, A., Montanari, G., Pasotti, P., Rambaldi, M. T., & Sandri, P (1993). *I problemi nella pratica didattica*. Progetto MaSE vol XB. Milano: F. Angeli.
D’Amore, B. (1994a). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. In B. Jannamorelli (Ed.), *Insegnamento / Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*. Atti del I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona, marzo 1993. Sulmona: Qualevita. [Ristampato anche su: 1993, *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289-301. Una versione più ampia in lingua tedesca appare su: 1996, *Journal für Mathematik Didaktik*, *17*(2), 81-97].
D’Amore, B. (1994b). Interventi spontanei a completamento di dati mancanti. In E. Gallo, L. Giacardi & F. Pastrone (Eds.), *Conferenze e seminari 1993-1994*. Pp. 68-80. Torino: Associazione Subalpina Mathesis “T. Viola”.
D’Amore, B. (1995a). Problemi di Matematica nella pratica didattica. *Didattica delle scienze*, 176, 50-52. [Questo articolo è stato ristampato su: 1995, *Cahiers de didactique des mathématiques*, *1*(16-17), 11-28 (greco), 103-110 (francese)].
D’Amore, B. (1995b). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328-370. [Questo testo è stato pubblicato anche in: Jannamorelli B. (Ed.) (1995), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*. Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 30-31marzo e 1 aprile 1995. Pp. 79-130. Sulmona: Qualevita].
D’Amore, B. (1995c). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328-370.
D’Amore, B. (1996a). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino*, 32, 57-64.
D’Amore, B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica*, *10*(4), 424-439. [Questo articolo è stato pubblicato anche in: B. D’Amore (Ed) (1996), *Convegno del*

Decennale. Pp. 65-82. Bologna: Pitagora. Questo testo è stato ripubblicato anche in lingua inglese in: B. D'Amore & A. Gagatsis (Eds) (1997), *Didactics of Mathematics - Technology in Education*. Pp. 11-24. Thessaloniki: Erasmus ICP 96 G 2011/11. Questo testo è stato ristampato in lingua italiana anche su: *La didattica*, 4, 1997, 84-92].

D'Amore, B. (1997a). Programmare per problem solving. *La didattica*, 3, 32-36.

D'Amore, B. (1997b). Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *20A*(3), 241-256. [Questo articolo è stato pubblicato in lingua spagnola: *Suma*, 1997, 26, 111-116. In lingua francese in: A. Gagatsis (Ed.) (1999), *A multidimensional approach to learning in mathematics and science.* Pp. 25-36. Nicosia: Intercollege].

D'Amorem B. (1999c). Considerazioni su alcuni aspetti del comportamento logico e strategico degli studenti al momento della risoluzione di problemi di matematica in àmbito scolastico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *22A*(5), 423-440.

D'Amore, B. (2001a). Vie nuove per i problemi. *La Vita Scolastica*, 17, 10-15.

D'Amore, B. (2001b). La matematica della strada. *Scuola dell'Infanzia*, 14, 12-14.

D'Amore, B. (2001c). Il senso del problema. *La Vita Scolastica*, 1, 64.

D'Amore, B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola elementare*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno* [Barcellona, Spagna], 38, 83-99. [Questo testo si trova anche negli Atti del *VII Simposio de Educación Matemática: Investigación en Didáctica de la Matemática*. 3-6 maggio 2005, Chivilcoy (Buenos Aires, Argentina)].

D'Amore, B. (2013). Risposte inattese ai problemi. *Scuola dell'infanzia*, *13*(6), 18-19.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e Silvia Sbaragli. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B. et al. (Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P.) (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(2), 131-146. [Questo articolo è stato ristampato in lingua inglese su A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.) (1996), *Didactics and History of Mathematics*. Pp. 53-72. Thessaloniki: Erasmus ICP 954 G 2011/11].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29A-B*(6), 645-664.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica* [Bellinzona, Svizzera], 66, 43-52.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *DiM Difficoltà in Matematica*, *11*(1), 89-109.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete) - An effect of the didactical contract: Imagining implicit requirements (even in problems that involve real concrete situations). *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161-196.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Marazzani, I. (2004). "Esercizi anticipati" e "zona di sviluppo prossimale": comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica*, *18*(2), 71-95.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula. Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson. [In lingua spagnola, 2008, Bogotà: Magisterio].

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Sbaragli S. (Eds.) (2011). *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. 14 volumi. Bologna: Pitagora. [Elenco dei volumi pubblicati: 1. Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S.: *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. 2. D'Amore, B., & Sbaragli, S.: *Principi di base di didattica della matematica*. 3. Fandiño Pinilla M. I.: *Curricolo, competenze e valutazione in matematica*. 4. D'Amore B., Marazzani I.: *Problemi e Laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica*. 5. Angeli A., D'Amore B., Di Nunzio M., Fascinelli E.: *Matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. 6. D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I.: *Spunti di storia della matematica ad uso didattico nella scuola primaria*. 7. Baldazzi L., Liverani G., Magalotti F., Monaco A., Prosdocimi L., Vecchi N.: *Numeri*. 8. Campolucci L., Fandiño Pinilla M. I., Maori D.: *Frazioni*. 9. Cottino L., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sbaragli S., Zola L.: *Geometria*. 10. Cottino L., Dal Corso E., Francini M., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sbaragli S., Zola L.: *Misura*. 11. Foresti I., Sangiorgi M. C.: *Trasformazioni geometriche*. 12. Arrigo G., Maurizi L., Minazzi T., Ramone V.: *Combinatoria Statistica Probabilità*. 13. Battaini A., Campolucci L., Gottardi G., Sbaragli S., Vastarella S.: *Uso del PC, della LIM, delle TIC e del software didattico dinamico*. 14. Marazzani I.: *Una raccolta ragionata di problemi*].

D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996) *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore, B., & Giovannoni, L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*, *11*(4), 360-399.

D'Amore, B., Godino, J. D., Arrigo, G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Maier, H. (1998). Investigating teacher's work with pupil's textual eigenproductions. *Atti del I Cerme di Osnabrük*, agosto 1998.

D'Amore, B., & Maier, H. (1999). Investigating teachers' work with pupils' textual eigenproductions. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*. Vol. II. Pp. 261-278. Osnabrück 1999.

D'Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, *16*(2), 144-189. [In lingua spagnola: D'Amore, B., & Maier, H. (2003).

Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Espsilon*. (Cádiz, Spagna). *18*(2), 53, 243-262].
D'Amore, B., & Marazzani, I. (2011). Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 4. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Martini, B. (1997a). Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *21A*(3), 209-234.
D'Amore, B., & Martini, B. (1997b). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, *11*(2), 150-175. [In lingua spagnola: 1997, *Números*, 32, 26-32. In lingua francese: 1998, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 95-118. In lingua inglese in A. Gagatsis (Ed.) (1999), *A multidimensional approach to learning in mathematics and science*. Pp. 3-24. Nicosia: Intercollege].
D'Amore, B., & Martini, B. (1997c). Perché si parla ancora tanto di metacognizione? In B. D'Amore & C. Pellegrino (Eds.), *Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza*. Pp. 34-39. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Persano, A. (1985). *Matematica-Scienze*. Roma: A. Armando.
D'Amore, B., & Plazzi, P. (1990). Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *4*(3), 18-24.
D'Amore, B., & Sandri, P. (1991). Il problema nella pratica matematica educativa. 1. Problemi sul tempo. 2. Problemi aritmetici. 3. Problemi geometrici. *La vita scolastica*, 3 (ottobre 1991) e 5 (novembre 1991).
D'Amore, B., & Sandri, P. (1993a). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 344-346. [Questo articolo è stato ristampato in A. Gagatsis (Ed.) (1994), *Didactiché ton Mathematicon*. Thessaloniki: Erasmus ICP 93G 2011/II. Pp. 247-252 (in greco), Pp. 579-584 (in francese). Questo articolo è stato inoltre ristampato su: 1995, *Cahiers de Didactique des Mathématiques*. 16-17. Pp. 11-28 (in greco), Pp. 103-110 (in francese)].
D'Amore, B., & Sandri, P. (1993b). Il problema nella pratica matematica educativa. *L'Educatore*, 1, I-X. [Questo articolo è stato ristampato su A. Gagatsis (Ed) (1993), *Didactike ton Mathematikon*. Thessaloniki: Report Erasmus 1992-93. In lingua greca: pp. 97-118, in lingua italiana: pp. 415-446].
D'Amore, B., & Sandri, P. (1994). Motivazione e immagine. *La Didattica*, 1, 73-77.
D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). "Fa finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(3), 223-246. [Questo articolo è stato ristampato in lingua spagnola su: 1999, *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática* (Bogotà, Colombia), 4(3), 207-231].
D'Amore, B., & Sandri, P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, *12*(1), 4-18. [Questo articolo è stato pubblicato anche in lingua francese: 1998, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 55-94].
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 139-163.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 2. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B., & Speranza F. (Eds.) (1989), *Lezioni di matematica per insegnanti della scuola elementare*. Bologna – Roma: Apeiron.

Davydov, V. V. (1979). *Gli aspetti della generalizzazione nell’insegnamento*. Firenze: Giunti - Barbera. (Ed. or. Mosca 1972).

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: LEA.

De Bartolomeis F. (*1979*). *Sistema dei* laboratori. Milano: Feltrinelli.

Deri, M., Sainati Nello, M., & Sciolis Marino. M. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *6A*(6), 6-27.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: Heath. (Trad. it. 1961, Firenze: La Nuova Italia).

De Zwart, H. S. (1983). L’acquisizione della scrittura alfabetica e della notazione matematica. In G. Stella, & F. Nardocci (Eds.), *Il bambino inventa la scrittura*. Pp. 85-101. Milano: Angeli.

Dienes, Z. (1963). *An experimental study of mathematics-learning*. New York: Hutchinson & Co.

Dienes, Z. & Golding, E. W. (1971). *Approach to modern mathematics*. New York: Herder & Herder.

Donald, A. N., & Rumelhart, D. E. (Eds.) (1975). *Explorations in cognition*. San Francisco: Freeman.

Donaldson, M., & Balfour, G. (1968). Less is more: A study of language comprehension in children. *British Joumal of Psychology*, 59, 461-471.

Donaldson, M., & McGarrigle, J. (1974). Conservation accidents. *Cognition*, 3, 341-350.

Duncker, K. (1969). *La psicologia del pensiero produttivo*. Firenze: Giunti-Barbera. (Ed. orig. Berlino 1935).

Eco, U. (1990). *I problemi dell’interpretazione*. Milano: Bompiani.

Emanuel, P., Gallo, E., & Longo, M. L. (1985). *Aspetti psicologici del problem solving e loro utilizzo in una sperimentazione sulla scomposizione di figure a livello percettivo e calcolo di aree*. Quaderno n. 2. Torino: NRD di Torino.

Fandiño Pinilla, M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. In B. D’Amore (Ed.), *Matematica: l’emergenza della didattica nella formazione*. *Rassegna* (Numero speciale),*14*(29), 21-28.

Fandiño Pinilla, M.I. (2010). Problemi di matematica? E perché no? *Scuola dell’Infanzia*, *11*(3), 18-20.

Fandiño Pinilla, M. I. (2011a). Numeri e problemi nella vita quotidiana. *Vita Scolastica*, *65*(16-17), 14-16.

Fandiño Pinilla, M. I. (2011b). Una buona didattica richiede un buon Sapere. In B. D’Amore, & S. Sbaragli (Eds.), *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica*. Atti del Convegno “Incontri con la matematica”, n. 25, Castel San Pietro Terme (Bo). Pp. 123-124. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2014). *Matematica, che passione*. Firenze: Giunti Scuola.

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Diversi aspetti che definiscono l’apprendimento e la valutazione in matematica*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Pitagora

Fandiño Pinilla, M. I., et al. (Eds) (2000). *Resolución de problemas aritméticos en la Básica Primaria.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá: Gaia.

Ferri, F. (Ed.) (1989). *Apprendimento per problemi in matematica nella scuola elementare*. Rapporto Tecnico 14. Modena: NRD di Modena e Comune di Modena.
Fischbein, E. (1985a). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pp. 8-19. Bologna: Umi-Zanichelli.
Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pp. 122-132. Bologna: Zanichelli-UMI.
Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 491-512.
Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Editor Bruno D'Amore. Atti dell'omonimo Convegno di Castel S. Pietro Terme, novembre 1992. Bologna: Pitagora.
Flavell, J. H. (1972). An analysis of cognitive-developmental sequenze. *Genetic Psychology Monographs*, *86*(2), 279-350.
Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-development inquiry. *American Psychologist*, *10*(34), 906-911.
Fodor, J. A. (1988). *La mente modulare*. Bologna: Il Mulino. [Ed. or. 1983, Cambridge: MIT Press].
Fornaca, R. (1991). *Storia della pedagogia*. Firenze: La Nuova Italia.
Franta, H. (1993). Il ruolo della piattaforma comunicativa e dell'incoraggiamento nella costruzione delle conoscenze matematiche. In AA. VV., Atti del Convegno: *La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media*, Verona, marzo 1993. Pp. 88-104. Torino: SEI.
Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: O. Riedel Publ. Company.
Furinghetti, F. (1993). Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 302-328.
Furth, G., & Wachs, H. (1977). *Il pensiero va a scuola*. Firenze: Giunti-Barbera.
Gallo, E., Amoretti, C., & Testa, C. (1989). Sul ruolo dei modelli nella risoluzione di problemi di geometria: controllo ascendente e discendente. *Quaderni di Ricerca in Didattica della Matematica*. 7. Torino.
Gardner, H. (1987). *Formae mentis*. Milano: Feltrinelli. (Ed. orig. 1983, New York: Basic Books].
Gelman, R. (1969). Conservation Acquisition: A Problem of learning to attend to relevant attributes. *Journal of Experimental Child Psychology*, 7, 167-187.
Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press.
Gentile, G. (1937). *Sommario di pedagogia come scienza filosofica*. II Vol.: Didattica. Firenze: Sansoni.
Gibb, E. G. (1956). Children's Thinking in the Process of Subtraction. *The Journal of Experimental Education*, *25*(1). 71-80.
Gimbayashi, H. (1969). Mathematics and mathematics education. In G. Hatano, & H. Gimbayashi (Eds.) (1969). *Logic and psychology of school subjects*. 4: *Mathematics*. Tokio: Meiji-Tosho.

Ginsburg, H. P., & Russell, R. L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *46*(6), 193.

Goffman, F. (1971). *Modelli di interazione*. Bologna: Il Mulino.

Goldiamond, I., Dyrud, J. E., & Miller, M. D. (1965). Practice as research in professional psychology. *Canadian Psychologist/Psychologie canadienne*, 6(1), 110-128.

Goldin, G. A. (1982). The measure of problem-solving outcomes. In F. Lester Jr. & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving*. Philadelphia: Franklin Institute Press.

Goldin, G. A., & Caldwell, J. (1979). Syntax, content and context variables examined in a research study. In G. A. Goldin, & C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, Oh: Eric.

Goldin, G. A. & McClintock, C. E. (Eds.) (1979), *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, Oh: Eric.

Greeno, J. G. (1976). Cognitive objectives of instruction: Theory of knowledge for solving problems and answering questions. In D. Klahr (Ed.), *Cognition* and instruction. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. G., Resnick, L. B., Pellegrino, J. W., Morris, L.L., Schadler, M., Mulholland, T., Glaser, R., & Blumberg, P. (1980). *Wertheimer revisited: lnformation-processing analyses of invention in the area-of-a-parallelogram task*. Pittsburgh: Learning Research and Developmental Center, Univ. of Pittsburgh.

Greer, E. (1987). Arithmetical operations as models. In J. A. Sloboda, & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Groppo, M. (1970). *Problemi di psicologia dell'educazione*. Milano: Vita e Pensiero.

Guttman, L. A. (1944). A basis for scaling quantitative data. *American Sociological Review*, 9, 139-150.

Hadamard, J (1945/1993). *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*. Milano: Raffaele Cortina. [Ed. orig. 1945: *Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover].

Handjaras, L. et al. (Eds.) (1983). *Concetti e conoscenza*. Torino: Loescher.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: J. Murray.

Hart, K. (1985). Le frazioni sono difficili. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pagg. 144-166. Bologna: Zanichelli-UMI.

Hebbeler, K. (1977). Young children's addition. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, *1*(4), 108-121.

Heckhausen, H. (1990). *Motivation und Handeln*. Berlin: Springer.

Hewett, F. M. (1968). *The emotionally disturbed children in classroom*. Bostoin: Allyn & Bacon.

Hjelmslev, L. (1968). l fondamenti della teoria del linguaggio. Torino: Einaudi. [Ed. or. 1943, Copenhagen: Akademisk forlag].

Holland, J. G., & Skinner B. F. (1961). *The Analysis of Behavior: A Program of Self-Instruction*. New York: McGraw-Hill Company.

Hudson, T. (1980). Young children's difficulty with "How many more … than … and there?". Doctoral dissertation, Indiana University, 1980. *Dissertations Abstracts International*, 41.

Hughes, M. (1982). Rappresentazione grafica spontanea del numero nei bambini. *Età evolutiva*, 12, 5-10.

James, W. (1899). *Talks to teacher on Psychology: and to Students on Some of Life's Ideals*. New York: Holt. (Attualmente: New York: Norton, 1958).

Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. M. J. (1990). *Deduction*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.
Kaes, R. (1983). *L'apparato pluripsichico*. Roma: A. Armando.
Kaes, R., & Anzieu, D. (1981). *Desiderio e fantasma in psicoanalisi e in pedagogia*. Roma: Armando.
Kanizsa, G. (1980). *Grammatica del vedere*. Bologna: Il Mulino.
Kline, M. (1973). *Why Jonny Can't Add?* New York: St. Martin's Press.
Koffka, K. (1921). *Die Grundlagen der psychischen Entwicklung des Kindes*. Osterwieck a/H: Zickfeldt. (Ed. inglese: London 1924).
Kohler, W. (1960). *L'intelligenza nelle scimmie antropoidi*. Firenze: Universitaria.
Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.
Kosslyn, S. M. (1989). *Le immagini della mente*. Firenze: Giunti. [Ed. or. 1983, New York: Norton].
Kruteskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: Chicago Univ. Press.
Kuhl, J. (1983). *Motivation, Konflikt und Handlungskontrolle*. Berlin: Springer.
Kuhl, J. (1984). Motivational aspects of achievement motivation and learned helplessness: Toward a comprehensive theory of action control. In B. A. Maher, & W. B. Maher (Eds.), *Progress in Experimental Personality Research*. Vol. 13. Pp. 99-171. New York: Academic Press, New.
Kulm, G. (1979). The classification of problem-solving research variables. In G. A. Goldin, & C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematicai problem solving*. Columbus, Oh: Eric.
Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en ineraction dans l'enseignement mathématique*. Thèse, Univ. J. Fourier, Grénoble.
Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121-135.
Lakatos, I. (1976). *Prove e confutazioni*. Torino: Boringhieri.
LeBlanc, J. F. (1976). *Addition and Subtraction. Mathematics Methods Program*. Bloomington: Univ. Indiana.
Lester, F. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. In R. Lesh, & I. Landau (Eds.) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.
F. Lester & J. Garofalo (1982). *Mathematical problem solving*. Philadelphia: Franklin Institute Press.
Luchins, A. S. (1942). Mechanization in problem solving. The effect of Einstellung. *Psychology Monographs*, 54, 1942.
Lumbelli, L. *(*1982*). Educazione come discorso*. Bologna: Il Mulino.
MacDonald, L. D. (1978). Insight and intuition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *9*(4), 411-420.
Mager R. F. (1962). *Preparing instructional objectivs*. Palo Alto, CA: Fearon.
Maier, H. (1993). Conflit entre langue mathématique et langue quitidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86-118. [Trad. it. su: 1995, *La matematica e la sua didattica*. *9*(3), 298-305].
Mariani, A. M. (1991). *Valutare gli insegnanti*. Brescia: La Scuola.
McCarthy, D. (1930). *The language development of the pre-school child*. Mineapolis: University of Minnesota Press.
McClelland, D. (1961). The Achieving Society. Princeton, NJ: Van Nostrand Co.

McGarrigle, J., Grieve, E., & Hughes, M. (1978). Interpreting inclusion: a contribution to·the study of the child's cognitive and linguistic development. *Journal of Experimental Child Psychology*, 26, 528-550.

Micol, G. (1991). I problemi «impossibili». *La matematica e la sua didattica*, *5*(4), 45-49.

Ministero della Pubblica Istruzione (1985). *Programmi didattici per la scuola primaria*. Decreto del Presidente della Repubblica, 12 febbraio 1985, n. 104. Roma: Ministero della Pubblica istruzione.

Mosconi, G., & D'Urso, V. (1973). *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera.

Moser, J. M. (1985a). Analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pp. 61-62. Bologna: Zanichelli-UMI.

Moser, J. M. (1985b). Alcuni aspetti delle più recenti ricerche sull'apprendimento dei concetti e delle abilità fondamentali della addizione e della sottrazione. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pp. 46-60. Bologna: Zanichelli-UMI.

Nepi, C. (1992). Ricordare. Che problema! *Civiltà Cibernetica*, *2*(12), 21-28.

Nesher, P. A. (1980). The Stereotyped nature of word problems. *For the Learning of Mathematics*, l, 41-48.

Nesher, P. A. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive process*. Hillsdale (N. J.): Lawrence Erlbaum.

Nicholls, I. G. (1983). Conceptions of ability and achievement motivations: A theory and its implications for education. In S. G. Paris & G. M. Olson (Eds.), *Learning and motivation in the classroom*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Paivio ,A. (1986). Mental representations: A dual coding approach. Oxford: Clarendon Press.

Palermo, D. S. (1974). Still more about the comprehension of «less». *Developmental Psychology*, 10, 827-829.

Pellerey, M. (1987). Ruolo e significato dell'istruzione matematica nel contesto scientifico e tecnologico attuale. In E. Laporta (Ed.), *Le ragioni dell'istruzione*. Pp. 65-100. Roma: Istituto dell'Enciclopedia Italiana.

Pellerey, M. (1991a). Lo sviluppo delle conoscenze e delle competenze matematiche nella scuola di base (materna, elementare e media): il ruolo della scuola elementare secondo i programmi vigenti. *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, 5, 73-88.

Pellerey, M. (1991b). La ricerca in didattica della matematica. Atti del Convegno: Processi cognitivi e problemi della ricerca didattica disciplinare, Milano, 7-8 febbraio 1991.

Pellerey, M. (1991c). Apprendere a pensare matematicamente. Prefazione a: Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1991). *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*. Pp. IX-XVII. Torino: Sei.

Pellerey, M. (1992). Tendenze nella ricerca in didattica e in psicologia dell'insegnamento della matematica. *Annali della Pubblica Istruzione*, 5-6, 532-552.

Pellerey, M. (1993). Volli, sempre volli, fortissimamente volli. La rinascita della psicologia della volontà. *Orientamenti pedagogici*, 6, 1005-1017.

Pellerey, M., & Orio, F. (1996). La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica. *ISRE*, 2, 52-73.

Pepe, L. (1986). Note e documenti per una storia dei programmi di matematica delle scuole elementari italiane (1859-1985). *L'educazione matematica*, *2*(1), 47-81.
Petter, G. (1984). *Lo sviluppo mentale nelle ricerche di J. Piaget*. Firenze: Giunti-Barbera.
Petter, G. (1985). *Conversazioni psicologiche con gli insegnanti*. Vol. II. Firenze: Giunti-Barbera.
Piaget, J. (1962). *Il linguaggio e il pensiero del fanciullo*. Firenze: Giunti Barbera. [Ed. or. 1923, Neuchâtel: Delachaux et Niestlé].
Piaget, J. (2000). *L'epistemologia genetica*. Bari: Laterza. [Ed. or. 1970, Parigi: Presses Universitaires de France].
Pick, G. (1899). Geometrisches zur Zahlenlehre. *Lotos. Zeitschrift fiir Natur-Wissenschaften* (Praga), 311-319.
Poincaré, H. (1906). *La science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion. [Trad. it. 1989, Bari: Dedalo].
Poincaré, H. (1914). *Science et méthode*. Paris: Flammarion.
Polanyi, M. *(*1967*).* The Tacit Dimension. Garden City, NY: Doubleday.
Poli, P., & Zan, R. (1996a). Le convinzioni dei bambini sui problemi: un confronto fra bravi e cattivi solutori. *Studi di psicologia dell'educazione*, 1-2, 61-74.
Poli, P., & Zan, R. (1996b). Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi: presentazione di un questionario elaborato per un'indagine nella scuola elementare. *La matematica e la sua didattica*, *10*(4), 440-466.
Pólya, G. (1945/1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli. [Ed. or. 1945: *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press].
Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics*. *Vol. 2: Patterns of plausible inference.* Princeton, NJ: Princeton University Press.
Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. I vol. New York: Wiley & Sons.
Polya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. In AA. VV., *Teaching and learning: A problem-solving focus*. New York: NCTM.
Pontecorvo, C. (1973). *Psicologia dell'educazione*. Teramo: Lisciani & Zampetti, EIT.
Pontecorvo, C. (1981). Educazione e scuola di fronte alle differenze di intelligenza. In AA.VV., *Intelligenza e diversità*. Pp. 240-243. Torino: Loescher.
Pontecorvo, C. (1983). Concettualizzazione e insegnamento. In AA.VV., *Concetti e conoscenze*. Pp. 262-363. Torino: Loescher.
Pontecorvo, C. (1985). Figure, parole, numeri: un problema di simbolizzazione. *Età evolutiva*, 22, 5-33.
Pontecorvo, C., & Pontecorvo, M. (1985). *Psicologia dell'educazione. Conoscere a scuola*. Bologna: Il Mulino.
Postic, M. (1979). *La relazione educativa*. Roma: Armando.
Priore, F. (1990). *Modelli, strumenti e misure nella didattica contemporanea*. Milano: Mursia,
Racle, G. (1983). *La pédagogie interactive*. Paris: Retz.
Repp, A. C. (1930). Mixed versus isolated drill organization. In G. M. Whipple (Ed.), *The twenty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education: Report of the Society's committee on arithmetic*. Bloomington, Ill.: Publishing of Public Schol.

Resnick, L. B. (1967). *Design of an early learning curriculum*. Working paper 16. Pittsburgh: Leaming Research and Development Center, University of Pittsburgh.
Resnick, L. B. (Ed.) (1973). *Hierarchies in children's learning. A symposium*. Numero speciale della rivista: *lnstructional Science*, 2, 311-362.
Resnick, L. B., Siegel, A. W., & Kresh, E. (1971). Transfer and sequence in learning double classification skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 11, 139-149.
Resnick. L. B., Wang, M. C., & Kaplan, J. (1973). Task analysis in curriculum design: A hierarchically sequenced introductory mathematics curriculum. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 6, 679-710.
Ricci Bitti, P. E., & Cortesi S. (1977). *Comportamento non verbale* e *comunicazione*. Bologna: Il Mulino.
Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.
Romberg, T. A., Harvey, J. G., Moser, J. M., & Montgomery, M. E. (1974). *Developing mathematical processes*. Chicago: Rand McNally.
Rothkopf, E. Z. (1974). Barbarism and mathemagenic activities: comment on criticism by Carver. *Journal of Literacy Research*, 6, 1, 3-8.
Roveda, P. (1979). *Il* transfer *nella relazione educativa*. Milano: Vita e Pensiero.
Sandman, R. S. (1980). The mathematics attitude inventory: instrument and user's manual, *Journal for research in mathematics education*, 11, 148-149.
Sastre, G., & Moreno, M. (1976). Représentation graphique de la quantité. *Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris*, 30, 346-355.
Saxe, G. B. (1977). A developmental analysis of notational counting. *Child Development*, 48, 1512-1520.
Saxe, G. B. (1979). Developmental relations between notational counting and number conservation. *Child Development*, 50, 180-187.
Saxe, G. B. (1982). Developing forms of arithmetic operation among the Oksapmin of Papua New Guinea. *Developmental Psychology*, *4*(18), 583-594.
Saxe, G. B. (1985). The effects of schooling on arithmetical understanding: Studies with Oksapmin children in Papua New Guinea. *Journal of Educational Psychology*, *5*(77),503-513.
Saxe, G. B. (1988). The mathematics of child street vendors. *Child Development*, 59, 1415-1425.
Saxe, G. B. (1991). Venditori ambulanti e conoscenze matematiche. *Età evolutiva*, 40, 3-16.
Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 57-71.
Sbaragli, S. (2009). Le insidie della divisione. *La Vita Scolastica*, 14, 18-19.
Sbaragli, S. (2012). Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica. In G. Bolondi, & M. I. Fandiño Pinilla M.I. (Eds.), *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Pp. 121-139. Napoli: Edises.
Scilligo, P. (1971). *La psicologia nella scuola e nella famiglia*. Zurigo: Pas-Verlag.
Schoenfeld, A. (Ed.) (1987a). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Schoenfeld, A. (1987b). What's all the fuss about metacognition? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. Pp. 334-370. New York: MacMillan.

Shepard, R. N. (1980). *Internal representations: Studies in perception imagery and cognition*. Montgomery, Vt: Bradford.

Starkey, P., & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal shool in arithmetic. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. P. (1970). Differential performance of first-grade children when solving arithmetic addition word problems. *Journal for Research in Mathematics 1*(3), 144-161.

Steffe, L. P., Hirstein, J. J., & Spikes, W. C. (1976). *Quantitative comparisons and class inclusion as readiness variables for learning first-grade arithmetical content*. (Technical Report n. 9). Tallahassee, Florida: Project for Mathematical Development of Children.

Tausch, R. (1978). Facilitative dimensions in interpersonal relationship. *College Student Journal*, 12, 2-11.

Terrassier, J.-Ch. (1985). *Ragazzi superdotati e precocità difficile*. Teramo: Lisciani & Giunti.

Thom, R. (1970/1980). La matematica "moderna": errore pedagogico e filosofico? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *3AB*(3), 4-24. [Ed. orig. 1970: Les Mathématiques "Modernes": un erreur pédagogique et philosophique? *L'âge de la science*, 3, 225-236].

Thom, R. (1973). Modern Mathematics; does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematics education.* Proceedings II ICMI 1972. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Thorndike, E. L. (1913). *Educational psychology*. Vol. II: *Psychology of learning*. New York:Teachers College, Columbia Univ.

Thorndike, E. L. (1914). *The psychology of learning*. New York: Teachers College Press.

Titone, R. (Ed.) (1981). *Avamposti della psicolinguistica applicata*. Roma: A. Armando.

Toulmin, S., & Feldman, C. (1976). Logic and the theory of mind. In J. K. Cole (Ed.), *Nebraska symposium on motivation 1975*. Lincoln: University of Nebraska Press.

Toulouse, É. (1910). *Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle: Henri Poincaré.* Paris: Flammarion.

Ugazio, V., & Venini, L. (1978). La comunicazione alunno-insegnante. In AA.VV., *Psicologia del rapporto educativo*. Milano: Isedi.

Uprichard,A. E. (1973). The effect of sequence in the acquisition of three set relation; An experiment with preschoolers. In L. B. Resnick (Ed.), *Hierarchies in children's learning. A symposium*. Numero speciale della rivista: *lnstructional Science*. Pp. 311-362.

Van Bendegem, J. P. (2016). The Philosophy of Mathematical Practice: What Is It All About? In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Survays*. Pp. 13-18. Hamburg, Germany: Faculty of Education, University of Hamburg.

Veggetti, M. S. (1983). *La concettualizzazione nell'età evolutiva: l'impostazione piagettiana e i contributi della scuola sovietica*. In AA.VV., *Concetti e conoscenza*, Pp. 197-261. Torino: Loescher.

Vergnaud, G. (1981a). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: P. Lang. (Trad. it. 1994, Roma: A. Armando. Prefazione di Bruno D'Amore).
Vergnaud, G. (1981b). Quelques orientations théoriques et méthodologiques de recherches françaises en didactique des matéhmatiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(2), 215-229.
Vergnaud, G. *(*1982*).* A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought, Involved in Addition and Subtraction Problems. In T.P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Pp. 39-59. Hillsdale, NJ: LEA.
Vergnaud, G. (1985a). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pp. 20-45. Bologna: Zanichelli-UMI.
Vergnaud, G. (1985b). Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Pp. 86-121. Bologna: Zanichelli-UMI.
Vergnaud, G. (1990a). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170. (Trad. it. su: 1992, *La matematica e la sua didattica*, *6*(l), 4-19).
Vergnaud, G. (1990b). *Psicologia cognitiva dello sviluppo e didattica della matematica*. Rapporto interno, n. 2. Torino: Politecnico di Torino.
Vergnaud, G. (1992). La teoria dei campi concettuali. *La matematica e la sua didattica*, *6*(l), 4-19.
Vygotskij, L. S. (1978 / 1987). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri. [Ed. in lingua inglese 1978].
Wang, M. C. (1973). Psychometric studies in the ralidation of an early learning curriculum. *Child Development*, 44, 54-60.
Wang, M. C., Resnick, L. B., & Boozer, R. F. (1971). The sequence of development of some early mathematics behaviors. *Child Development*, 42, 1767-1778.
Webb, N. (1979). Content and context variables in problem task. In G. A. Goldin, & C. E. McClintock (Eds.) (1979). *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, Oh: Eric.
Werner, H., & Kaplan, B. (1963). *Formazione del simbolo*. Milano: Cortina.
Werner, H., & Kaplan B. (1992). *Psicologia, comportamento e sviluppo mentale*. Firenze: Giunti.
Wertheimer, M. (1920). *Über Schlußprozesse im produktiven Denken*. Berlin: Weltkreisverlag. [In lingua inglese: *A Source Book of Gestalt Psychology*, London: Kegan Paul, Trench, Trubner].
Whorf, B. (1959). Linguistics and exact science, citato in E. T. Hall (Ed.), *The silent language*. New York: Publeday.
Whorf, B. (1970). *Linguaggio, pensiero e realtà*. Torino: Boringhieri. (Ed. or. 1956, Cambridge, Ma: Cambridge Univ. Press].
Wittman, E. (1981). The complementary roles oi intuitive and reflective thinking in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 389-397.
Zalamea, F. (2012). *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. New York, US: Sequence Press.
Zweng, M. J. (1979). The problem of solving story problems. *Arithmetic Teacher*, *27*(1), 2-3.